

Conditions de stabilité dans la théorie des modules de faisceaux cohérents

Mihai-Cosmin Pavel

Institut de Mathématiques de l'Académie Roumaine
Bucarest, Roumanie
cpavel@imar.ro

Résumé—Nous explorons le concept de stabilité dans la théorie des espaces de modules. Nous mettons en évidence son importance dans le cas des fibrés vectoriels sur les variétés complexes, où les conditions de semi-stabilité jouent un rôle clé dans la construction d'espaces de modules possédant de bonnes propriétés géométriques. Certains des résultats présentés ici proviennent des travaux communs réalisés en collaboration avec Damien Mégy, Julius Ross et Matei Toma.

Mots-clés—espaces de modules, conditions de stabilité, faisceaux cohérents

I. INTRODUCTION

L'un des objectifs fondamentaux de la géométrie algébrique est de classer ses objets d'étude mathématiques (tels que les anneaux, les courbes, etc.). Nous limitons généralement notre attention à une classe fixe d'objets dotés d'une certaine structure algébrique qui nous intéresse. Afin de relier les objets de cette classe, nous supposons que pour deux objets A et B , il existe des applications, appelées morphismes,

$$f: A \rightarrow B$$

qui préservent la structure algébrique sous-jacente. De plus, il est raisonnable de supposer que la composition de ces morphismes est associative et se comporte de manière similaire à la composition des fonctions des ensembles. Dans ce cas, il existe également un morphisme d'identité $\text{id}_A: A \rightarrow A$ unique pour tout objet A , qui maintient la structure algébrique de A inchangée.

Alors on peut définir une notion naturelle d'isomorphisme, qui nous dit quand deux objets dans cette classe ont la même structure algébrique et peuvent être considérés comme équivalents. Plus précisément, deux objets A et B sont dits *isomorphes* (ou équivalents) s'il existe des morphismes

$$f: A \rightarrow B, \quad g: B \rightarrow A$$

tels que $f \circ g = \text{id}_B$ et $g \circ f = \text{id}_A$.

Ce que nous avons décrit jusqu'à présent est appelé une *catégorie* en mathématiques. Pour rendre cette discussion plus concrète, nous présentons l'exemple suivant. Nous considérons la catégorie des espaces vectoriels complexes de dimension finie. Dans ce cas, un morphisme

$$V \rightarrow W$$

de deux espaces vectoriels est par définition une application linéaire. Nous avons une notion naturelle d'équivalence dans cette catégorie donnée par l'isomorphisme linéaire. En plus de la structure algébrique, nous pouvons souvent trouver d'autres propriétés de nos objets qui sont laissées *invariantes* par les isomorphismes. Par exemple, nous remarquons que la dimension d'un espace vectoriel reste invariante sous les isomorphismes de notre catégorie. Ce fait est la conséquence d'un résultat fondamental de l'algèbre linéaire selon lequel il existe un espace vectoriel unique de dimension fixe, jusqu'à l'isomorphisme linéaire.

Un exemple plus intéressant est obtenu en considérant la catégorie des fibrés vectoriels holomorphes sur une variété

complexe fixée X . Rappelons qu'un tel fibré vectoriel est une variété complexe E munie d'une application holomorphe $\pi: E \rightarrow X$ telle que chaque fibre $E(x) := \pi^{-1}(x)$, pour $x \in X$, soit un espace vectoriel complexe de rang fixé. De plus, ces fibres varient de manière "complexe-analytique", ce qui définit la structure holomorphe de E .

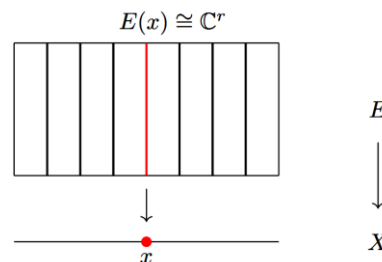


FIGURE 1. La structure locale d'un fibré vectoriel sur X

Dans cette catégorie, un morphisme de fibrés vectoriels est donné par un diagramme commutatif d'applications holomorphes

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\quad} & F \\ \pi \searrow & & \swarrow \varphi \\ & X & \end{array}$$

où π et φ sont les applications naturelles associées aux fibrés vectoriels E et F , respectivement, et qui induit une application linéaire $E(x) \rightarrow F(x)$ entre les fibres, pour tout $x \in X$. Si X est réduit à un point, il est facile de voir que nous retrouvons ainsi la catégorie des espaces vectoriels complexes.

Pour classer nos objets, nous cherchons généralement à trouver des invariants capables de distinguer les objets non isomorphes. Ces invariants peuvent prendre différentes formes : ils peuvent être algébriques, géométriques, numériques, etc. Une fois un invariant établi, il devient possible de restreindre l'étude à la sous-classe d'objets partageant ce même invariant. Idéalement, on aimerait trouver un nombre fini d'invariants qui déterminent complètement notre objet, mais cela est rarement le cas.

Nous sommes amenés à étudier une sous-classe d'objets, éventuellement infinis, qui partagent certains invariants. L'un des principaux objectifs de la théorie des modules est d'étudier la variation (locale et globale) de la structure algébrique dans cette sous-classe d'objets. Dans ce cas, nous aimerions doter l'ensemble de nos objets d'une structure topologique qui décrit la variation continue de la structure algébrique. Cet espace, lorsqu'il existe, est appelé espace de modules, selon une terminologie introduite par Riemann. Parfois, cet espace topologique possède une géométrie riche, puisqu'il peut être doté en plus d'une structure géométrique différentiable ou complexe avec de bonnes propriétés.

Dans le premier exemple, l'ensemble M des classes d'isomorphisme des espaces vectoriels est en bijection avec l'ensemble des entiers non négatifs par

$$M \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad [V] \rightarrow \dim_{\mathbb{C}}(V).$$

Cet ensemble est naturellement doté de la topologie discrète.

Dans le cas des fibrés vectoriels holomorphes, la situation est plus

compliquée. Ici, on fixe généralement le type topologique des fibrés et on laisse leur structure holomorphe varier. Mais même si nous fixons cet invariant topologique, nous devons en général toujours travailler avec une très grande famille d'objets, pour laquelle il est impossible de construire un espace de modules ayant de bonnes propriétés géométriques. Dans de nombreux cas, si nous voulons obtenir un espace de modules compact, on est obligé d'imposer certaines conditions restrictives sur les objets. De plus, nous devons élargir la catégorie des fibrés vectoriels et considérer également les "dégénérescences" de fibrés vectoriels, qui sont appelés faisceaux cohérents. Nous renvoyons le lecteur à Serre [?] pour la théorie des faisceaux cohérents en géométrie algébrique.

II. CONDITIONS DE STABILITÉ

Nous présentons ici, d'abord de manière abstraite, une notion générale de stabilité introduite par Rudakov [?], qui est souvent utilisée pour imposer des conditions restrictives sur les objets de la catégorie étudiée. Nous fixons une catégorie abélienne $\mathcal{A}$, qui est une catégorie possédant de nombreuses propriétés qui sont souhaitables en général (voir [?] pour la définition précise). Par exemple, dans cette catégorie, les sous-objets $B \rightarrow A$ et les objets quotients $A \rightarrow C$ de tout objet $A \in \mathcal{A}$ existent et restent dans $\mathcal{A}$. De plus, il existe un objet nul $0 \in \mathcal{A}$ (unique), qui est à la fois un sous-objet $0 \rightarrow A$ et un quotient $A \rightarrow 0$ de tous les objets $A \in \mathcal{A}$. Dans cette catégorie, on peut également définir des suites exactes courtes

$$0 \rightarrow B \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} C \rightarrow 0, \quad (*)$$

où f est injective, g est surjective, et l'image de f s'identifie avec le noyau de g .

Définition. Une structure de stabilité sur $\mathcal{A}$ est donnée par un préordre $\leq$ sur les objets non nuls de $\mathcal{A}$ tel que, pour toute suite exacte $0 \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow 0$ d'objets non nuls, l'une des conditions suivantes est satisfaite :

$$B < A \Leftrightarrow B < C \Leftrightarrow A < C, \text{ ou}$$

$$B > A \Leftrightarrow B > C \Leftrightarrow A > C, \text{ ou}$$

$$B \asymp A \Leftrightarrow B \asymp C \Leftrightarrow A \asymp C.$$

Avec cette notion de préordre, il est possible que deux objets non nuls A et B dans la catégorie vérifient $A \asymp B$, même si $A \neq B$.

Définition. On dit qu'un objet $A \in \mathcal{A}$ est *semi-stable* lorsque A est non nul et que pour tout sous-objet non trivial $B \rightarrow A$, on a $B \leq A$. L'objet est appelé *stable* si nous avons toujours des inégalités strictes.

Un exemple de structure de stabilité particulièrement utile pour nous est défini en utilisant le rapport de deux fonctions additives sur $\mathcal{A}$. À cet égard, nous utilisons le groupe de Grothendieck $K(\mathcal{A})$ associé à $\mathcal{A}$, qui est le groupe abélien libre des classes d'isomorphisme $[A]$ des objets $A \in \mathcal{A}$, modulo la relation

$$[A] = [B] + [C]$$

pour chaque suite exacte courte comme dans (*). Dans ce cas, l'objet nul correspond à l'élément neutre de $K(\mathcal{A})$. La définition suivante est une variante de celle donnée dans.

Définition. Soit $d, r : K(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions additives et supposons que $r(A) > 0$ pour tout objet A de $\mathcal{A}$. Nous définissons la fonction pente

$$\mu(A) = \begin{cases} \frac{d(A)}{r(A)}, & r(A) > 0, \\ +\infty, & r(A) = 0 \end{cases}$$

pour tous les objets $A \in \mathcal{A}$ non nuls, que nous utilisons pour définir le préordre suivant sur $\mathcal{A}$:

$$B \leq A \Leftrightarrow \mu(B) \leq \mu(A).$$

Nous introduisons ensuite une notion de semi-stabilité pour les faisceaux cohérents. Nous fixons une variété projective complexe lisse X . Pour chaque classe k -ample $\omega \in \text{Amp}^k(X)$, nous considérons la fonction :

$$\deg_{\omega_k} : K(X) \rightarrow \mathbb{R}, \quad [E] \mapsto \int_X \text{ch}(E) \cdot \omega_k \cdot \text{td}_X.$$

Ici, nous notons par $K(X)$ le groupe de Grothendieck des faisceaux cohérents, qui coïncide en fait dans ce cas avec le groupe de Grothendieck correspondant à la catégorie des fibrés vectoriels. Cela découle du fait que tout faisceau cohérent admet une résolution finie par des fibrés vectoriels sur une variété projective.

Définition. Soit d un nombre naturel entre 1 et $\dim(X)$, et soit $\omega = (\omega_d, \omega_{d-1}) \in \text{Amp}^d(X) \times \text{Amp}^{d-1}(X)$ une paire de classes amples sur X . Alors, les fonctions additives

$$d := \deg_{\omega_d-1}, \quad r := \deg_{\omega_d}$$

définissent une structure de stabilité sur la catégorie $\text{Coh}_d(X)$ des faisceaux cohérents de dimension au plus d . Plus précisément, nous savons qu'un objet $0 \neq E \in \text{Coh}_d(X)$ est μ^ω -semi-stable si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- 1) E est un faisceau de torsion, i.e., $\dim(E) < d$.
- 2) E est un faisceau pur de dimension d , i.e., $\dim(F) = d$ pour tout $0 \neq F \subset E$, et

$$\mu^\omega(F) := \frac{d(F)}{r(F)} \leq \frac{d(E)}{r(E)} =: \mu^\omega(E)$$

pour tous les sous-faisceaux cohérents non nuls $F \subset E$.

Nous remarquons que dans le cas où $\omega = (h^d, h^{d-1})$ avec $h \in \text{Amp}^1(X)$ une classe ample intégrale, nous retrouvons la notion classique de semi-stabilité par rapport à la pente, qui a été largement étudiée dans la littérature.

III. ESPACES DE MODULES DES FAISCEAUX SEMI-STABLES

Dans ce qui suit, nous ne considérerons que le cas des faisceaux cohérents purs semi-stables de dimension fixée d . L'idée d'imposer des conditions de stabilité sur les faisceaux était d'obtenir une sous-classe d'objets qui est, d'une certaine manière, *bornée*. Nous formulons ce problème de finitude de la semi-stabilité par rapport à une classe numérique $v \in K(X)_{\text{num}}$ de dimension $d > 0$ et un sous-ensemble compact $K \subset \text{Amp}^d(X) \times \text{Amp}^{d-1}(X)$.

FSS(K, v) : La famille de faisceaux cohérents E de type numérique v sur X tels que E soit μ^ω -semi-stable pour certains $\omega \in K$ est *bornée*.

Plus précisément, une famille est dite bornée si tous ses objets peuvent être paramétrés par un schéma de type fini sur C . Le cas où $K = \{(\omega_d, \omega_{d-1})\}$ est particulièrement important pour la construction d'espaces de modules de faisceaux de *type fini* sur X .

Une fois ces espaces de modules construits, il est naturel de s'interroger sur leur dépendance par rapport au choix de la classe ω .

Pour étudier la variation de la semi-stabilité des faisceaux (avec un type numérique fixe v) en fonction de ω variant dans le compact K , il faut s'assurer que **FSS(K, v)** est valable. Bien que des progrès significatifs aient été réalisés dans de nombreux cas d'intérêt, le problème reste généralement ouvert. Dans le cas où $d = \dim(X)$, plusieurs résultats de ce type ont été obtenus par Matsuki-Wentworth [?] sur les surfaces lisses et par Greb-Ross-Toma [?] sur des espaces

de dimensions supérieures.

En général, nous avons le résultat principal suivant, qui est traité dans [?]. Voir le loc. cit. pour plus de détails sur le théorème.

Théorème. Fixons une classe numérique v de dimension $d > 0$ sur X et un sous-ensemble $K \subset \text{Amp}^d(X) \times \text{Amp}^{d-1}(X)$ compact. Sous l'hypothèse que $\text{FSS}(K, v)$ est satisfaite, les deux résultats suivants sont valables :

- 1) Pour chaque $\omega \in K$, il existe un espace de modules $\mathcal{M}_\omega^{ss}(v)$ de faisceaux μ^ω -semi-stables de type numérique v sur X . Plus précisément, $\mathcal{M}_\omega^{ss}(v)$ est un champ algébrique de type fini sur $\mathbb{C}$.
- 2) Il existe une décomposition de K en un nombre fini de chambres qui décrit le changement de μ^ω -stabilité pour les faisceaux de type numérique v . Dans chaque chambre, la notion de semi-stabilité, ainsi que $\mathcal{M}_\omega^{ss}(v)$, reste inchangée.

III. RÉSULTATS DE BORNITUDE POUR LES FAISCEAUX SEMI-STABLES

Nous obtenons de nouveaux résultats de bornitude pour les faisceaux cohérents purs dans [?]. Le premier résultat principal est le suivant :

Théorème. L'énoncé $\text{FSS}(K, v)$ est vrai pour des classes numériques v de dimension 2 arbitraires et tout compact $K \subset \text{Amp}^2(X) \times \text{Amp}^1(X)$.

En plus des conséquences dans la théorie des modules de faisceaux, ce théorème a des applications pour la géométrie énumérative grâce au travail de Joyce [?], en particulier pour obtenir des invariants énumératifs pour des faisceaux purs de dimension deux sur une variété Fano de dimension trois.

En dimensions supérieures, nous obtenons ce qui suit :

Théorème. Soit v une classe numérique de faisceaux cohérents de dimension d sur X , et soit $h_1, \dots, h_{d-1}, h'_1, \dots, h'_{d-1}$ des classes amples rationnelles dans $\text{Amp}^1(X)$. Alors, il existe un sous-ensemble compact connexe $K_{d-1} \subset \text{Amp}^{d-1}(X)$ contenant $h_1 \cdots h_{d-1}$ et $h'_1 \cdots h'_{d-1}$ tel que pour tout ensemble compact non vide $K_d \subset \text{Amp}^d(X)$, l'énoncé $\text{FSS}(K_d \times K_{d-1}, v)$ est vrai.

Dans le cas où $d = 4$, nous pouvons choisir K_{d-1} apparaissant dans le théorème comme dans l'illustration suivante :

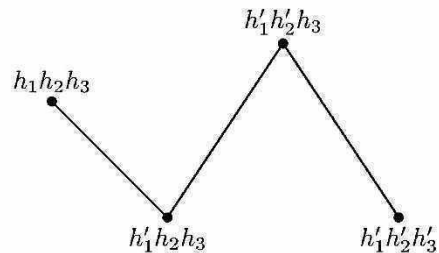


FIGURE 2.

Conformément à la motivation initiale, ces résultats de bornitude permettent la construction d'espaces de modules de faisceaux purs semi-stables avec de bonnes propriétés géométriques et montrent l'existence d'une structure de *chambres* qui décrit la variation de la semi-stabilité.