

# Espaces de modules des faisceaux semi-stables

Mihai-Cosmin Pavel  
Institut de Mathématiques de l'Académie Roumaine  
Bucarest, Roumanie  
cpavel@imar.ro

**Résumé** — Le projet de recherche présenté ici est toujours en cours et est réalisé en collaboration avec Damien Mégy et Matei Toma de l'Institut Elie Cartan de Lorraine, Nancy, France. Nous introduisons une notion de semi-stabilité pour les faisceaux cohérents sur une variété projective complexe lisse. Nous utilisons ensuite cette notion pour construire de nouveaux espaces de modules de faisceaux semi-stables.

## I. INTRODUCTION

La théorie des modules des faisceaux a suscité un intérêt considérable en raison de ses vastes applications dans divers domaines de recherche tels que la géométrie hyperkählérienne, la géométrie énumérative, la théorie de jauge, etc. Son principal objectif est l'étude des espaces de modules des faisceaux sur un espace donné. En explorant la riche géométrie de ces espaces de modules, nous visons à améliorer notre compréhension de la structure de l'espace de base sous-jacent.

Les espaces de modules de ce type sur des bases de dimension complexe un et deux sont classiques et occupent une place centrale dans le domaine (comme dans la théorie des fibres de Higgs et les invariants de Donaldson, par exemple). D'autre part, la théorie des modules des faisceaux sur des bases de dimension trois et plus en est encore à ses débuts, et il subsiste un certain nombre de questions ouvertes dans ce domaine.

Pour notre étude, nous utilisons une nouvelle notion de semi-stabilité (voir la section suivante), qui est une généralisation étendue de la semi-stabilité de Gieseker classique et partage bon nombre de ses propriétés. La nouveauté réside dans le fait que cette notion offre plus de flexibilité du point de vue de la variation des espaces de modules en dimensions supérieures.

En utilisant cette notion de semi-stabilité, nous construisons de nouveaux espaces de modules de faisceaux sur une variété projective complexe lisse donnée. Ces espaces présentent des propriétés fonctorielles intéressantes, au sens où ils co-représentent le foncteur de modules associé sur la catégorie des espaces algébriques. De plus, dans le cas de la semi-stabilité de type multi-Gieseker (voir [1]), et en particulier de la semi-stabilité de Gieseker, il est connu que l'on peut utiliser la Théorie Géométrique des Invariants (TGI) pour doter ces espaces de modules d'une structure de schéma projectif.

En l'absence d'une construction TGI générale, la question de savoir quand ces espaces sont projectifs reste sans réponse, sauf dans quelques cas étudiés par Greb–Ross–Toma (voir [1] et [2]).

De plus, nous étudions également la variation de ces espaces de modules de faisceaux par rapport au changement de semi-stabilité. A cet égard, nous montrons qu'il existe une décomposition en "chambres" à l'intérieur desquelles la notion de semi-stabilité reste inchangée.

## II. NOTATION ET TERMINOLOGIE

Nous fixons une variété projective complexe lisse  $X$ . Pour la construction d'espaces de modules (de type fini) de faisceaux sur  $X$ , il est nécessaire de travailler avec des familles de faisceaux cohérents qui sont *bornées*. Cela est généralement réalisé en imposant certaines conditions restrictives sur les faisceaux, telles que la semi-stabilité classique par rapport à la pente. Nous introduisons ci-dessous une notion plus générale de semi-stabilité qui convient mieux à nos objectifs. Considérons un système complet de degrés

$$\omega = (\omega_0, \dots, \omega_d)$$

donné par des classes amples  $\omega_k \in \text{Amp}^k(X)$ , pour un entier donné  $d > 0$ . Chaque composante  $\omega_k \in \text{Amp}^k(X)$  définit une fonction de degré

$$\deg_{\omega k} : K(X) \rightarrow \mathbb{R}$$

en envoyant la classe d'un faisceau cohérent  $E$  sur  $X$  à  $\int_X \text{ch}(E) \cdot \omega_k \cdot \text{td}_X$ .

Pour un faisceau cohérent  $E$  de dimension  $d$  sur  $X$ , nous définissons son polynôme de Hilbert par rapport à  $\omega$  :

$$P_E^\omega(m) = \deg_{\omega d}(E)m^d + \deg_{\omega d-1}(E)m^{d-1} + \dots + \deg_{\omega 0}(E).$$

**Définition.** Un faisceau cohérent  $E$  de dimension  $d$  sur  $X$  est appelé  $\omega$ -(semi-)stable s'il est pur, et nous avons

$$\frac{P_F^\omega(m)}{\deg_{\omega d}(F)} < (\leq) \frac{P_E^\omega(m)}{\deg_{\omega d}(E)} \text{ pour } m \gg 0$$

pour tous les sous-faisceaux propres  $F \subset E$ . Notez que chaque faisceau  $\omega$ -semi-stable est, en particulier,  $\mu^\omega$ -semi-stable par rapport à la fonction de pente  $\mu^\omega = \deg_{\omega d-1} / \deg_{\omega d}$ .

Ceci est une instance particulière de la semi-stabilité polynomiale de Bayer [3]. On peut également retrouver la semi-stabilité multi-Gieseker de Greb–Ross–Toma [1] pour certains choix de  $\omega$ . En particulier, nous obtenons les conditions de  $h$ -semi-stabilité de Gieseker pour  $\omega = ([X], h, \dots, h^d)$  avec  $h \in \text{Amp}^1(X)$  une classe intégrale ample.

## III. LE PROBLEME DES MODULES

Deux questions naturelles se posent à nous :

1) Existe-t-il un espace de modules  $M_\omega$  de faisceaux  $\omega$ -semi-stables de type numérique fixe sur  $X$  ? Si oui, est-ce que  $M_\omega$  est projectif ?

2) Comment  $M_\omega$  varie-t-il avec le changement de  $\omega$ -semi-stabilité ?

Dans le contexte de la semi-stabilité de Gieseker, les deux questions ont été largement étudiées par plusieurs auteurs. Grâce aux travaux de Mumford, Gieseker, Maruyama et Simpson, nous avons une réponse satisfaisante à la première question. En utilisant les

méthodes TGI, ils ont construit des espaces de modules projectifs  $M_h$  de faisceaux semi-stables de type Gieseker, qui dépendent de la polarisation intégrale choisie  $h \in \text{Amp}^1(X)$ .

En ce qui concerne la deuxième question, il faut étudier la variation des espaces de modules avec le changement de semi-stabilité. Nous passons brièvement en revue l'état de l'art ci-dessous.

**Cas de la surface :** Dans le cas de la surface, l'image est plutôt bien comprise (voir [4], [5]). On sait que le cône réel  $\text{Amp}^1(X)$  est divisé par un ensemble localement fini de murs linéaires rationnels en chambres à l'intérieur desquelles  $M_h$  ne change pas. De plus, pour deux polarisations  $h_1$  et  $h_2$  divisées par un mur, les espaces de modules correspondants  $M_{h_1}$  et  $M_{h_2}$  sont liés par une séquence finie de retournements de Thaddeus. Lorsque la deuxième classe de Chern des faisceaux étudiés est suffisamment grande, il a également été démontré que  $M_{h_1}$  et  $M_{h_2}$  sont en fait birationnels (voir [6, Sect. 4.C]).

**Cas de dimensions supérieures :** Dans les dimensions supérieures,  $\text{Amp}^1(X)$  admet toujours une décomposition en murs et en chambres, mais sa structure est plus compliquée. Si l'on applique la même construction que dans le cas de la surface, alors les murs obtenus ne sont plus linéaires, et comme l'a noté Qin [4], ils ne sont pas nécessairement de type fini à l'intérieur du cône ample. De plus, Schmitt [7] a donné un exemple explicite d'une variété de Calabi-Yau de dimension trois avec un nombre de Picard égal à deux pour laquelle il existe au moins un mur sans classes rationnelles.

Pour éviter les difficultés qui apparaissent en dimensions supérieures concernant le changement de semi-stabilité, nous préférons utiliser la notion de  $\omega$ -semi-stabilité. Cette notion offre plus de flexibilité que la semi-stabilité de Gieseker, car on peut varier indépendamment les composantes de  $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_d)$  à l'intérieur de leurs cônes amples correspondants.

#### IV. CONSTRUCTION DES ESPACES DE MODULES

Afin de construire des espaces de modules de type fini de faisceaux sur  $X$ , nous devons travailler sous certaines hypothèses de finitude sur les faisceaux. Nous formulons ce problème de finitude de la semi-stabilité (FSS) par rapport à une classe numérique  $v \in K(X)_{\text{num}}$  de dimension  $d > 0$  et des sous-ensembles relativement compacts  $K_0 \subset \text{Amp}^d(X)$  et  $K_1 \subset \text{Amp}^{d-1}(X)$ .

**FSS( $K_0 \times K_1, v$ ) :** La famille de faisceaux cohérents  $E$  de type numérique  $v$  sur  $X$  tels que  $E$  soit  $\mu^\omega$ -semi-stable pour certains  $\omega \in K_0 \times K_1$  est bornée.

Il est connu que c'est un problème difficile qui est crucial pour l'étude de la variation des espaces de modules de faisceaux. Même si beaucoup de progrès ont été réalisés dans de nombreux cas d'intérêt, il reste encore ouvert en général. Le cas  $K_0 \times K_1 = \{(\omega_{d-1}, \omega_d)\}$  est particulièrement important pour la construction d'espaces de modules de faisceaux de type fini sur  $X$ . Il a fallu les efforts de nombreux mathématiciens pour le résoudre dans le contexte de la semi-stabilité classique par rapport à la pente (voir [8]–[12]).

Nous fixons une classe numérique  $v$  de dimension  $d > 0$  et un système complet de degrés  $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_d)$ . Sous l'hypothèse que **FSS**( $\{(\omega_{d-1}, \omega_d)\}, v$ ) est satisfaite, nous utilisons les méthodes d'Alper–Halpern-Leistner–Heinloth [13] pour démontrer :

**Théorème.** *Il existe un espace de modules grossier  $M_\omega(v)$  de faisceaux  $\omega$ -semi-stables de type numérique  $v$  sur  $X$ . Les points géométriques de  $M_\omega(v)$  sont en correspondance bijective avec les classes de  $S$ -équivalence de faisceaux  $\omega$ -semi-stables.*

#### V. VARIATION DES ESPACES DE MODULES

Pour étudier la variation de la  $\omega$ -semi-stabilité des faisceaux (avec un type numérique fixe  $v$ ), il faut s'assurer que **FSS**( $K_0 \times K_1, v$ ) est valable. Dans le cas sans torsion, plusieurs résultats de ce type ont été obtenus par Matsuki–Wentworth [5] sur les surfaces lisses et par Greb–Ross–Toma [1] sur des espaces de dimensions supérieures.

Pour le moment, nous supposons que ces hypothèses de finitude sont vérifiées dans notre contexte. En ce qui concerne la variation de la semi-stabilité, nous souhaitons prouver l'affirmation suivante :

**Affirmation.** *Il existe une structure de chambres linéaires finie qui décrit le changement de  $\omega$ -stabilité pour les faisceaux de type numérique  $v$ .*

Cette partie est toujours en cours de développement.

#### REFERENCES

- [1.] D. Greb, J. Ross, and M. Toma, "Variation of Gieseker moduli spaces via quiver GIT," *Geom. Topol.*, vol. 20, no. 3, pp. 1539–1610, 2016.
- [2.] D. Greb, J. Ross, M. Toma, "Semi-continuity of stability for sheaves and variation of Gieseker moduli spaces," *J. Reine Angew. Math.*, vol. 749, pp. 227–265, 2019.
- [3.] A. Bayer, "Polynomial Bridgeland stability conditions and the large volume limit," *Geometry & Topology*, vol. 13, no. 4, pp. 2389 – 2425, 2009.
- [4.] Z. Qin, "Equivalence classes of polarizations and moduli spaces of sheaves," *J. Differ. Geom.*, vol. 37, no. 2, pp. 397–415, 1993.
- [5.] K. Matsuki and R. Wentworth, "Mumford-Thaddeus principle on the moduli space of vector bundles on an algebraic surface," *Int. J. Math.*, vol. 8, no. 1, pp. 97–148, 1997.
- [6.] D. Huybrechts and M. Lehn, *The geometry of moduli spaces of sheaves*. 2nd ed. Cambridge University Press, 2010.
- [7.] A. Schmitt, "Walls of Gieseker semistability and the Mumford-Thaddeus principle for moduli spaces of sheaves over higher dimensional bases," *Comment. Math. Helv.*, vol. 75, no. 2, pp. 216–231, 2000.
- [8.] M. F. Atiyah, "Vector bundles over an elliptic curve," *Proc. Lond. Math. Soc.* (3), vol. 7, pp. 414–452, 1957.
- [9.] F. Takemoto, "Stable vector bundles on algebraic surfaces," *Nagoya Math. J.*, vol. 47, pp. 29–48, 1972.
- [10.] M. Maruyama, "On boundedness of families of torsion free sheaves," *J. Math. Kyoto Univ.*, vol. 21, pp. 673–701, 1981.
- [11.] T. Simpson, "Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety. I," *Publ. Math., Inst. Hautes Etud. Sci.*, vol. 79, pp. 47–129, 1994.
- [12.] Langer, "Semistable sheaves in positive characteristic," *Ann. Math.* (2), vol. 159, no. 1, pp. 251–276, 2004.
- [13.] J. Alper, D. Halpern-Leistner, and J. Heinloth, "Existence of moduli spaces for algebraic stacks," 2019, arXiv 1812.