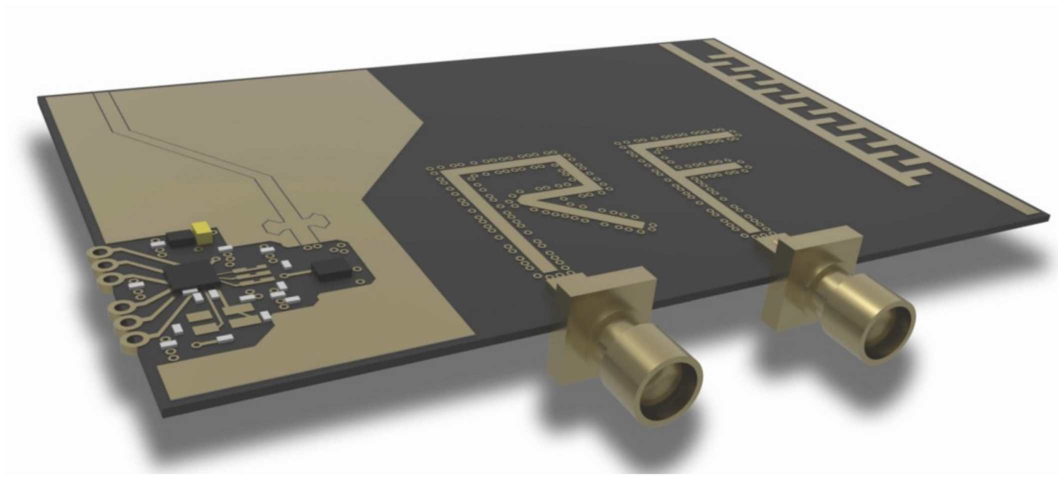
Ștefan Cantaragiu

MICROUNDE
soluții numerice



MICRO-ONDES
solutions numeriques

Editura
Academiei Oamenilor de Știință
din România

EDITURA TEHNICA

CASETA CIP

CUPRINS / TABLE DE MATIERES

MICROUNDE soluții numerice

CAPITOLUL 6

AMPLIFICATOARE DE MICROUNDE CU TRANZISTOARE. CIRCUITE DE ADAPTARE

CAPITOLUL 7

STUDIUL NEOMOGENITĂŢILOR CIRCUITELOR DE MICROUNDE CU AJUTORUL MATRICEI DE DISPERSIE

CAPITOLUL 8

PACHET DE PROGRAME PENTRU CALCULUL PARAMETRILOR CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC ŞI AI CIRCUITELOR DE MICROUNDE

MICRO-ONDES solutions numeriques

CHAPITRE 2

ETUDE DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE DANS LA LIGNE MICRO-RUBAN BLINDÉE, EN UTILISANT LA MÉTHODE DES DIFFERENCES FINIES

CHAPITRE 3

PARAMETRES DE LA LIGNE MICRO-RUBAN BLINDÉE

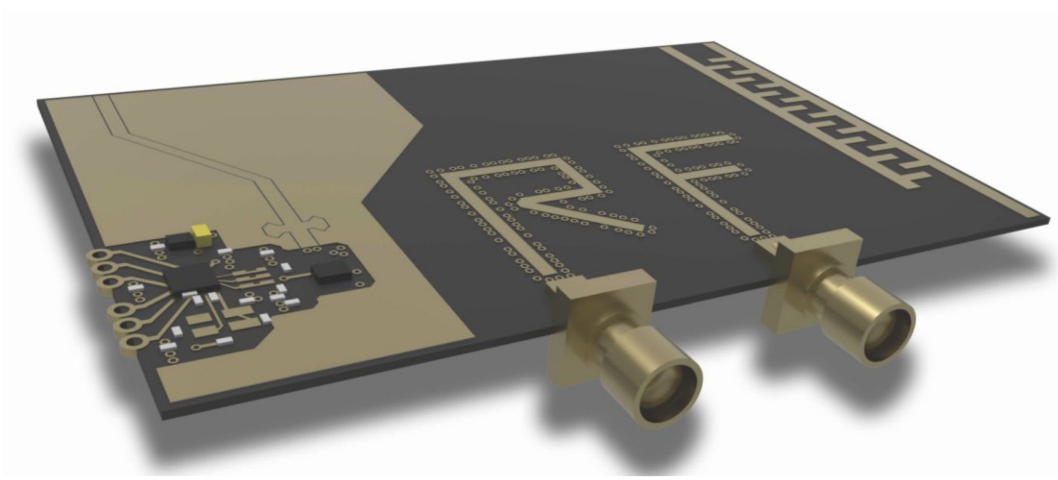
CHAPITRE 4

ELEMENTS DE CIRCUIT SPECIFIQUES A LA GAMME DES MICRO-ONDES

CHAPITRE 5

ÉTUDE DES CIRCUITS DE MICRO-ONDES EN UTILISANT LES PARAMETRES S

MICROUNDE
soluții numerice



ARGUMENT

Cartea este rezultatul activității și experienței prodigioase a autorului într-un domeniu de real interes în actualitatea contemporană, și anume studiul teoriei și aplicațiilor microundelor.

Prin modul de abordare a problemelor tratate, de altfel de utilitate concretă în procesul de educație și inovare, cartea subliniază importanţa aspectelor referitoare la furnizarea unor date în strictă concordanţă cu fenomenele fizice din gama microundelor. Autorul demonstrează necesitatea acestor date și informații în studierea și proiectarea asistată a circuitelor integrate hibride în toată gama microundelor, precum antene și rețele de antene, componente ale sateliților, interconexiuni de mare viteză, filtre, conectori și circuite integrate cu elemente semiconductoare etc.

Dincolo de aspectele teoretice prezentate și analizate în carte, o atenție specială este acordată aplicațiilor concrete. In finalul lucrării, un capitol este dedicat, în principal, prin exemple concrete, inițierii și dezvoltării abilităților de calcul ai parametrilor distribuţiilor câmpului electromagnetic și a circuitelor de microunde.

Tematica prezentată este utilă specialiştilor în domeniu datorită folosirii liniilor de transmisiune microstrip pe scară din ce în ce mai largă în configuraţia tuturor circuitelor integrate hibride de microunde. Deopotrivă, lucrarea este un ghid practic necesar studenților, masteranzilor și doctoranzilor datorită accentului pus de autor pe utilizarea și dezvoltarea pachetelor de programe destinate calculului parametrilor circuitelor complexe de microunde.

Cartea este editată bilingv în limbile română și franceză. Secțiunea în limba română, prezintă o abordare cuprinzătoare a studiului câmpului electromagnetic cu accent pe metodele de calcul și soluțiile propuse, iar secțiunea în limba franceză este focalizată pe metodele numerice de calcul ale câmpului electromagnetic, ale parametrilor și ale circuitelor de microunde și, deopotrivă, pe ilustrarea pachetelor de programe interactive la care utilizatorul are acces prin intermediul aplicațiilor disponibile în cloud.

Prof. univ. dr. ing. Doina BANCIU

INTRODUCERE

Cartea își propune să aducă o contribuție esențială la elucidarea multora dintre provocările câmpului electromagnetic în linia microstrip și este continuarea unei abordări similare [43], publicată cu ceva ani în urmă. În plus, cartea supune atenției o suită de pachete de programe interactive, destinate studiul comportării dinamice a câmpului electromagnetic cu ajutorul parametrilor S din linia microstrip ecranată și a circuitelor de microunde aferente.

Totodată, lucrarea sintetizează experiența autorului acumulată în domeniul microundelor de-a lungul carierei profesionale, începută cu proiecte și realizări practice încă din primii ani ai studenției, atunci când proiectarea circuitelor domeniului FFI (prescurtare utilizată pentru *“frecvențe foarte înalte”*) cu ajutorul parametrilor S [46], [47], în detrimentul parametrilor admitanță (Y), era văzută cu oarecare circumspecție de mulți dintre specialiștii anilor '80.

Importanţa elaborării unor modele matematice riguroase reiese din faptul că proiectarea optimă a dispozitivelor de microunde care utilizează liniile microstrip presupune deţinerea unor informaţii reale privind caracteristicile de propagare ale câmpului electromagnetic şi configuraţia tuturor modurilor de undă existente în linie.

Într-o serie de lucrări de specialitate, [1]÷[7], analiza şi calculul parametrilor liniilor microstrip se efectuează în ipoteza aproximării cvasi-statice, care presupune că modul fundamental de undă de propagare poate fi aproximat cu modul transversal electromagnetic (TEM). O astfel de abordare permite să se obţină rezultate satisfăcătoare numai pentru valorile celor mai mari lungimi de undă din domeniul de frecvenţă al microundelor, atunci când lungimea de undă depăşeşte considerabil dimensiunile transversale ale liniei. Practic, proiectarea bazată pe aproximarea cvasi-statică poate fi acceptată atunci când frecvenţa de lucru a dispozitivelor de microunde este mai mică de 3 GHz, iar substratul are o permitivitate dielectrică relativă scăzută (de obicei, mai mică decât 6). Realizările recente din domeniul microundelor solicită, însă, funcţionarea liniilor microstrip la frecvenţe mult mai mari, atingând ordinul sutelor de GHz, precum şi utilizarea unor substraturi cu permitivitate relativă ridicată [2], [9], [18]÷[22], [32]÷[59]. O dată cu creșterea frecvenței de lucru, pe măsura deplasării în domeniul undelor centimetrice şi milimetrice, analiza cvasi-statică a liniei microstrip produce erori tot mai mari. Acest fenomen este consecința caracterului dispersiv al liniei microstrip (parametrii variază în funcție de frecvență) și a existenței în linie a unor moduri de undă de ordin superior.

Întrucât linia microstrip este o structură neomogenă, care conține două medii dielectrice cu proprietăţi diferite, modul de propagare este unul hibrid şi nu poate fi asociat modului de propagare TEM.

Studiul comportării câmpului electromagnetic din linia microstrip ecranată presupune satisfacerea următoarelor obiective, prezentate în detaliu în conţinutul cărții:

1) să se ocupe de natura reală a modurilor de propagare hibride, respectiv să determine componentele câmpului electromagnetic, corespunzătoare modului de propagare hibrid fundamental (dominant din punct de vedere energetic), să determine modurile de propagare hibride de ordin superior și să permită obținerea informațiilor despre caracteristicile de dispersie ale parametrilor liniei;

2) să considere linia microstrip plasată în interiorul unei cutii metalice şi să permită, astfel, luarea în considerare a condițiilor generate de efectele de ecranare electrică;

3) să țină cont, din motive de ordin practic, de faptul că este necesar ca dimensiunile cutiei de ecranare să fie mult mai mari, în comparație cu grosimea mediului dielectric aflat în substrat şi cu lățimea stripului metalic plasat între cele două medii dielectrice;

4) să folosească o metodă suficient de generală pentru a permite obţinerea unor soluţii generale, care poate fi extinsă la structurile microstrip cu neomogenităţi fizico-geometrice ale conductoarelor liniilor mai complexe, datorate modificărilor multiple ale dimensiunilor acestora, care sunt specifice, în cazul rezonatoarelor, filtrelor, cuploarelor sau al configuraţiilor slotline şi al ghidurilor de undă coplanare [6];

5) să utilizeze aproximări corecte, în așa fel încât acuratețea calculelor să fie limitată doar de puterea de calcul și software-ul utilizat; aproximațiile acceptate în literatura de specialitate consideră că mediile dielectrice din structurile microstrip sunt fără pierderi și privind conductivitatea infinită a conductorului.

Dificultăţile pe care le presupune elaborarea studiului câmpului electromagnetic din linia microstrip constau, în principal, în satisfacerea simultană a obiectivelor stabilite mai sus.

Având în vedere tehnicile numerice de aproximare, utilizate la soluţionarea ecuaţiilor cu derivate parţiale, lucrările apărute în literatura de specialitate [10]÷[25], care se ocupă de analiza modurilor de propagare hibride şi de proprietăţile de dispersie ale liniilor microstrip, se pot împărţi în două grupe situate, într-un fel, la două extremităţi opuse ale spectrului cunoscut de aplicabilitate la problemele electromagnetismului. Prima grupă vizează metode numerice precedate de procesări analitice semnificative, în timp ce a doua grupă se caracterizează printr-o prelucrare analitică extrem de rudimentară, toată dificultatea fiind transferată procedurilor de calcul disponibile pe piață.

Dintre abordările care utilizează procesări analitice detaliate se evidenţiază, datorită aplicării în premieră a acestor tehnici la structurile microstrip, cele ale lui R. Mittra şi T. Itoh [11], care, prin modificarea metodei convenţionale (ce presupune rezolvarea problemelor Dirichlet şi Neuman din domeniul analizat), urmăresc determinarea modurilor de propagare din linia microstrip cu ajutorul unor ecuaţii integrale şi folosesc, în acest sens, serii de funcţii cu convergenţă foarte rapidă. Pe aceeaşi linie se situează lucrarea lui G. I. Zysman şi D. Varon [14], care au abordat problema electrodinamică a liniilor microstrip cu ajutorul sistemului de ecuaţii integrale, transformat într-o ecuaţie matricială, dar, din păcate, autorii articolelor [11] şi [14] nu furnizează detalii asupra modului în care se rezolvă sistemele de ecuaţii integrale. Metoda cel mai des utilizată în problemele de electrodinamică este metoda Fourier, în care soluţiile ecuaţiilor diferenţiale ale câmpului electromagnetic se determină sub forma unor serii de funcţii adaptate structurii microstrip, iar pentru aproximarea soluţiilor se utilizează sume parţiale ale seriilor.

G. I. Veselov, împreună cu un colectiv [22], au prezentat în lucrările lor rezultatele analizei structurilor electrodinamice microstrip, fără a dezvălui, însă, în nici una din lucrările ce au urmat [22], modul în care se obţin sistemul de ecuaţii infinit omogen şi modalitatea de rezolvare a acestuia.

Din cadrul celei de-a doua grupe menţionate, care vizează tehnici numerice des utilizate în rezolvarea sistemelor dinamice, se remarcă demersurile lui P. Daly [13], ce utilizează metoda elementului finit, cele ale lui J. S. Hornsby şi A. Gopinath [10], care folosesc metoda diferenţelor finite şi urmăresc satisfacerea tuturor obiectivelor sus-menţionate, dar insistă mai puţin asupra obiectivelor 3 şi 4.

Organizată pe opt capitole, cartea abordează într-o succesiune logică, cu detalierile corespunzătoare, studiului riguros al câmpului electromagnetic din linia microstrip și al circuitelor de microunde, și se încheie cu exemple de aplicaţiilor dedicate calculului parametrilor circuitelor de microunde.

Capitolele din compunerea cărții tratează următoarele subiecte:

În ***capitolul 1*** - “**Studiul câmpului electromagnetic din linia microstrip ecranată cu ajutorul metodei analitice**” **-** sunt prezentate, etapele necesare deterninării *configuraţiei modurilor de propagare hibride* din linia de transmisiune microstrip ecranată și apoi modalitatea de adaptare a modelului matematic ales la structuri microstrip mai complicate, alegându-se, în acest sens, liniile microstrip cuplate. La finele capitolului sunt prezentate rezultatele analizelor şi ale simulărilor efectuate cu ajutorul mediului de dezvoltare Matlab şi concluziile ce decurg din acestea.

În Capitolul 2 **-** “**Studiul câmpului electromagnetic din linia microstrip ecranată cu ajutorul metodei diferenţelor finite**” – este prezentată analiza câmpul electromagnetic cu ajutorul unei *metode numerice* performante, care a fost utilizată cu succes la rezolvarea celor mai complexe probleme ale electrodinamicii şi care permite *aproximarea ecuaţiilor Helmholtz într-un număr finit de puncte* din domeniul analizat.

În secţiunea finală a capitolului sunt prezentate graficele componentelor câmpului electromagnetic, iar prin intermediul câtorva determinări elocvente, limitele formulelor pe care le utilizează metoda cvasi-statică la frecvenţele superioare ale microundelor.

În ***capitolul 3*** **-** ”**Parametrii liniei microstrip ecranate**” **-** se trec în revistă modalităţile de calcul a principalilor parametri ai liniei, determinaţi, mai întâi, cu ajutorul **aproximării cvasi-statice** şi, ulterior, cu ajutorul *analizei electrodinamice a câmpului electromagnetic*. Totodată, se definesc şi *mărimile specifice propagării* câmpului în linia microstrip ecranată.

Capitolul 4 este dedicat prezentării câtorva elemente de circuit care se regăsesc în configuraţia circuitelor din gama microundelor (*inductanţe, condensatoare, rezistoare, rezonatoare, joncţiuni şi dispozitive de excitare a liniilor de transmisiune, cuploare direcţionale, divizoare şi sumatoare de putere*), fără, însă, a-şi propune epuizarea acestora.

În cadrul ***capitolului 5,*** intitulat “**Studiul circuitelor de microunde cu ajutorul parametrilor S”**, îşi propune să ofere o metodă valabilă în domeniul microundelor, care să elimine dificultăţile pe care le presupune analiza multiporţilor cu ajutorul parametrilor impedanţă şi admitanţă. În partea finală a capitolului este prezentată *metoda grafurilor de fluenţă,* care permite calcularea *câştigului unui diport*, parametru esenţial în cazul analizei circuitelor active de microunde.

Capitolul 6, **“Amplificatoare de microunde cu tranzistoare”**, prezintă pe parcursul său modul în care se analizează stabilitatea unei structuri active de microunde, algoritmul de calcul al amplificatoarelor de microunde de bandă îngustă cu tranzistoare prin *metoda grafo-analitică* şi alte aspecte legate de specificitatea domeniului abordat (*proiectarea circuitelor de adaptare*, scheme de conectare, considerente avute în vedere la realizarea practică a amplificatoarelor).

În cadrul ***capitolului 7,*** **“Studiul neomogenităţilor circuitelor de microunde cu ajutorul matricei de dispersie”**, se pun bazele unei metode de calcul al structurii câmpului electromagnetic, în care se ţine cont de diversitatea şi complexitatea *modurilor de undă* şi de multitudinea neomogenităţilor liniei de transmisiune pe care le presupune configuraţia unui circuit de microunde.

Capitolul 8, ***“*Pachet de programe Matlab pentru calculul parametrilor câmpului electromagnetic și ai circuitelor de microunde”**, lansează o provocare și, în același timp, o invitație adresată în special studenților, masteranzilor și doctoranzilor în domeniu de a extinde suita de programe ce poartă numele generic de *Microwave Solutions*, destinate calculului anumitor parametri ai distribuţiilor câmpului electromagnetic. Toate implementările metodelor utilizate au fost realizate folosind mediul integrat de dezvoltare Matlab. Capitolul prezintă doar cu titlu de exemplu, câteva aplicaţii concrete în scopul ilustrării modalităţii de utilizare a pachetului de programe, iar conceperea lor sub forma unei implementări modulare facilitează integrarea viitoare în pachet a unor alte componente, circuite și aplicații de microunde.

Prezentarea anexelor aferente capitolelor cărții și a bibliografiei bogate, dar în același timp selective, completează abordarea aplicativă a soluțiilor propuse cititorilor.

* *
*

Aduc mulţumirile mele Editurii Tehnice și Editurii Academiei Oamenilor de Știință din România, constituite dintr-un colectiv eficient şi profesionist, cu o mențiune specială pentru susținerea deplină primită din partea doamnei prof. univ. dr. ing. Doina Banciu, Vicepreședinte al Academiei Oamenilor de Știință din România, care s-a aplecat cu interes asupra acestei lucrări, a acceptat invitația prefațării acesteia, a avut inițiativa și a pledat pentru redactarea cărții în ediție bilingvă.

Recunoștința mea profundă se adresează soților Ursu, respectiv regretatei matematician Felicia Ursu și matematicianului dr. Ioan Ursu, pentru înțelegerea și validarea abordărilor stimulative pe care domeniul microundelor le impune din start cu imuabilitate.

Nu în ultimul rând, aduc mulţumiri întregii mele familii pentru înţelegere şi sprijinul constant și necondiționat.

CAPITOLUL 1

STUDIUL CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC DIN LINIA MICROSTRIP ECRANATĂ CU AJUTORUL METODEI ELECTRODINAMICE

În acest capitol este prezentată metoda electrodinamică de studiu a câmpului electromagnetic din linia microstrip ecranată, care permite verificarea ecuaţiilor electromagnetismului în totalitatea domeniul analizat şi satisfacerea condiţiilor impuse câmpului electromagnetic la suprafaţa de separare dintre cele două medii dielectrice din compunerea liniei microstrip ecranate şi în imediata vecinătate a muchiei conductorului aflat între acestea.

Formularea problemei, ce se doreşte a fi analizată, vizează satisfacerea tuturor obiectivelor prezentate în capitolul introductiv şi presupune parcurgerea, în principal, a două etape: prima se referă la trecerea de la obiectul real la modelul fizic, iar a doua se ocupă de formalizarea matematică a modelului fizic adoptat.

Modelul matematic ales, care permite studierea comportării câmpului electromagnetic din linia microstrip ecranată, este un sistem de ecuaţii liniare, la a cărui rezolvare contribuie analiza structurii electrodinamice.

1.1 Ecuaţiile fundamentale ale electromagnetismului

Determinarea riguroasă a configuraţiei câmpului electromagnetic şi a parametrilor liniei microstrip ecranate şi a caracteristicilor de dispersie ale acestora este posibilă cu ajutorul analizei electrodinamice.

De unde rezultă necesitatea şi importanţa analizei electrodinamice a fenomenelor din structura microstrip ?

O încercare de a răspunde la această întrebare este prezentată în continuare, dar alte argumentele în favoarea utilizării acestei abordări vor fi dezvăluite în conţinutul capitolului.

Legitatea matematică, care descrie comportarea sistemelor dinamice, exprimată de forma generală a unui sistem liniar de ecuaţii diferenţiale:

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n,$$

caracterizează orice mişcare materială, de la mişcarea unui resort până la mişcarea unei navete spaţiale. În consecinţă, acest sistem de ecuaţii este utilizat în orice problemă de vibraţii. Natura ondulatorie a microundelor impune utilizarea ecuaţiilor diferenţiale ale lui Maxwell în vederea determinării configuraţiei câmpului electromagnetic din linia microstrip.

De asemenea, necesitatea elaborării unui model matematic, bazat pe analiza electrodinamică a câmpului electromagnetic din linia de transmisiune microstrip ecranată, este impusă de existenţa în modelul fizic al liniei a unor configuraţii în care distingem în esenţă:

a) mediile dielectrice şi conductoare, cu proprietăţi electrodinamice distincte;

b) singularităţile reprezentate de muchiile conductorului metalic plasat între cele două medii dielectrice.

Sunt două aspecte coerente privind rezolvarea discontinuităţilor:

- din punct de vedere fizic muchiile nu sunt geometric perfecte, ci prezintă nişte ”rotunjiri”;

- din punct de vedere matematic, metodele de aproximare vin tocmai să corespundă acestor “imperfecţiuni” geometrice.

Aceste discontinuităţi pot determina singularităţi ale soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale ale lui Maxwell, care ar implica, paradoxal, valori infinite ale energiei câmpului electromagnetic în spaţiile finite din imediata vecinătate a muchiilor conductorului. În vederea depăşirii unor astfel de dificultăţi se folosesc metodele de aproximare, convergenţă şi optimizare, specifice analizei fenomenelor electrodinamice.

* *
*

Distribuția câmpului electromagnetic din linia microstrip simetrică ecranată se determinată cu ajutorul ecuaţiilor electromagnetismului, cunoscute în literatura de specialitate şi sub denumirea de “ecuaţiile Maxwell”. Configurația unei secțiuni transversale, în planul *x0y* din linia microstrip ecranată, este prezentată în figura 1.1.

Studiul electromagnetic al unui mediu dielectric perfect (liniar, omogen şi izotrop) duce la determinarea unui câmp electromagnetic, constituit din vectorul câmp electric $\vec{E}$ şi vectorul câmp magnetic $\vec{H}$, funcţii de punct şi de timp, a căror propagare se studiază în regim armonic, adică:

$$\vec{E} = \vec{E}(x, y, z)e^{j\omega t},$$

$$\vec{H} = \vec{H}(x, y, z)e^{j\omega t},$$

unde ω este frecvenţa unghiulară. Legea de distribuţie a câmpului, în secţiunea transversală a liniei microstrip ecranate, nu este o funcţie de *z*.

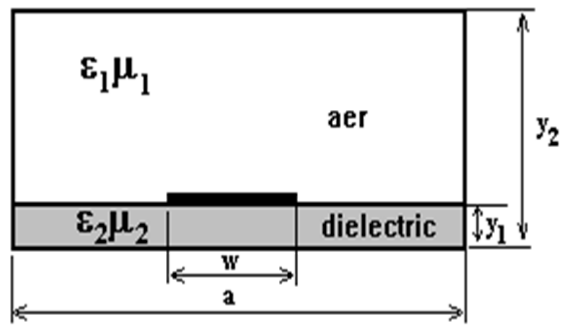


Figura 1.1 Secţiune transversală prin linia de transmisiune microstrip simetrică ecranată.

În schimb, propagarea de-a lungul liniei microstrip este funcție de *z* şi are loc sub forma unei unde progresive:

$$f\,(z) = e^{-\gamma z} \tag{1.1}$$

Mărimile $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ reprezintă, în acelaşi timp, vectori şi amplitudini complexe ale câmpului electric şi magnetic. Aceste câmpuri, împreună cu vectorii densitate de flux electric $\vec{D}$ şi densitate de flux magnetic $\vec{B}$, verifică ecuațiile de evoluție ale lui Maxwell, respectiv:

- legea inducției,

$$rot\,\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \tag{1.2a}$$

- legea lui Ampere,

$$rot\,\vec{H} = \vec{J_c} + \vec{J_d} \tag{1.2b}$$

şi ecuaţiile de stare, respectiv:

-legea lui Gauss pentru câmpul electric,

$$div\,\vec{D} = \rho_v \tag{1.2c}$$

- legea lui Gauss pentru câmpul magnetic,

$$div\,\vec{B} = 0, \qquad (1.2d)$$

în care:

$\vec{J}_c$ este vectorul densitate de curent de conducţie,

$\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ este vectorul densitate de curent de deplasare,

ρ_v este amplitudinea complexă a densităţii de volum a sarcinii electrice (mărime scalară).

Ecuaţia de conservare, denumită şi ecuaţia de continuitate [27], asigură legătura dintre $\vec{J}$ şi ρ_v şi se scrie sub forma:

$$div\,\vec{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0 \qquad (1.3)$$

Se observă că cele două legi ale lui Gauss sunt consecințe imediate ale ecuațiilor (1.2a), (1.2b) şi (1.3). Mediile dielectrice perfecte şi cele magnetice perfecte verifică relațiile:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \qquad (1.4a)$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H}, \qquad (1.4b)$$

unde ε este permitivitatea dielectrică a mediului, iar μ reprezintă permeabilitatea magnetică a acestuia.

Mediile conductoare verifică legea lui Ohm, respectiv:

$$\vec{J}_c = \sigma\vec{E}, \qquad (1.5)$$

unde σ este conductivitatea mediului.

În vid permitivitatea şi permeabilitatea acestuia sunt totdeauna constante şi au valorile:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}\, 10^{-9} \frac{F}{m},$$

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{H}{m},$$

iar $\varepsilon_0 \mu_0 c_0^2 = 1$,

unde $c_0 = 3x10^8$ m/s şi este viteza luminii în vid.

Dacă se aplică rotorul primei ecuaţii de evoluţie a lui Maxwell, (1.2a), se obţine relaţia:

$$rot\,rot\,\vec{E} = -\,rot\,\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

în care, dacă se ţine cont de relaţia (1.4b) şi de proprietatea de omogenitate a operatorului liniar diferenţial, se obţine:

$$rot\,rot\,\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mu\ rot\,\vec{H} \qquad (1.6)$$

Apoi, în expresia (1.6) se introduce relaţia (1.2b), în care s-a ţinut cont de faptul că, în cazul mediilor dielectrice, vectorul densitate de curent de deplasare, $\vec{J}_d$ este mult mai mare decât vectorul densitate de curent de conducţie, $\vec{J}_c$ [27], şi se obţine:

$$rot\,rot\,\vec{E} = -\,\varepsilon\mu\,\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}. \qquad (1.7)$$

În relaţia (1.7) se foloseşte formula dublului rotor şi se obţine o ecuaţie corespunzătoare vectorului câmp electric, respectiv:

$$\varepsilon^{(\delta)}\mu^{(\delta)}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \Delta\vec{E} = 0, \qquad (1.8a)$$

unde $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ este laplace-ianul exprimat în coordonate carteziene. Indicele δ, introdus pentru a diferenţia cele două domenii din figura 1.1, are valoarea 1, atunci când ecuaţia (1.8a) descrie comportarea câmpului electric în aer şi valoarea 2, atunci când ecuaţia descrie comportarea câmpului din mediul dielectric plasat sub stripul metalic.

În mod analog se obţine ecuaţia corespunzătoare vectorului câmp magnetic, respectiv:

$$\varepsilon^{(\delta)}\mu^{(\delta)}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \Delta\vec{H} = 0 \qquad (1.8b)$$

Viteza de propagare a undelor prin linia de transmisiune se calculează cu relaţia:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^{(\delta)}\mu^{(\delta)}}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon_{r\delta}\mu_{r\delta}}},$$

unde $\varepsilon_{r\delta}$ şi $\mu_{r\delta}$ reprezintă permitivitatea relativă şi respectiv permeabilitatea relativă a mediilor.

În regim armonic, cu dependenţă temporală dată de funcţia $e^{i\omega t}$, ecuaţiile (1.2a)÷(1.2b), ţinând cont de relaţiile (1.3), (1.4a), (1.4b) şi (1.5), devin:

$$rot\,\vec{E} + i\omega\mu^{(\delta)}\vec{H} = 0, \tag{1.9a}$$

$$rot\,\vec{H} - i\omega\varepsilon^{(\delta)}\vec{E} = \vec{J}, \tag{1.9b}$$

$$div\,\vec{J} - i\omega\rho = 0, \tag{1.9c}$$

$$\vec{J} = \sigma\vec{E}, \tag{1.9d}$$

iar ecuaţiile (1.8a) şi (1.8b) devin:

$$\Delta\vec{E} + \omega^2\varepsilon^{(\delta)}\mu^{(\delta)}\vec{E} = 0, \tag{1.10a}$$

$$\Delta\vec{H} + \omega^2\varepsilon^{(\delta)}\mu^{(\delta)}\vec{H} = 0 \tag{1.10b}$$

Ecuaţiile (1.10a) şi (1.10b) reprezintă **ecuaţiile undelor** pentru câmpul electric şi respectiv magnetic.

1.2 Ecuaţiile Helmholtz

Din considerente de simetrie se analizează doar jumătate din structura prezentată în figura 1.1 (de asemenea, s-a redus la jumătate numărul neomogenităţilor geometrice care urmează a fi analizate), iar axa de simetrie s-a considerat la mijlocul conductorului (stripului metalic), unde *x=0* (figura 1.2). În literatura de specialitate [22], această secţiune înjumătăţită a liniei microstrip ecranate este denumită celula elementară. Se consideră că în planurile care limitează celula elementară se află dispuşi pereţi electrici (în $x=x_2$, $y=0$ şi $y=y_2$) şi un perete magnetic (în planul $x=0$).

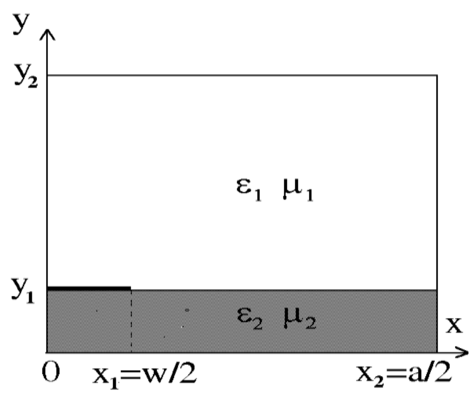


Figura 1.2. Celula elementară a liniei microstrip ecranate.

Grosimea conductorului situat la limita de separare dintre medii se consideră a fi egală cu zero, iar mediile se caracterizează prin permitivităţi şi permeabilităţi relative scalare.

În continuare, se doreşte obţinerea unor ecuaţii, ale căror soluţii să fie valabile atât în domeniul 1, cât şi în domeniul 2.

Întrucât propagarea undelor electromagnetice în linie se face de-a lungul axei longitudinale *z*, care este perpendiculară pe secţiunea transversală din figura 1.2, aceasta se supune legii de variaţie din relaţia (1.1). În consecinţă, se pot considera notaţiile simbolice:

$$\frac{\partial}{\partial z} \to -\gamma \quad \left(\frac{\partial e^{-\gamma z}}{\partial z} = -\gamma e^{-\gamma z}\right), \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \to \gamma^2 \quad \left(\frac{\partial^2 e^{-\gamma z}}{\partial z^2} = \gamma^2 e^{-\gamma z}\right), \tag{1.12}$$

Întrucât în condiţii de propagare, în linia microstrip fără pierderi, constanta de propagare este pur imaginară, respectiv:

$$\gamma \cong i\,\beta, \tag{1.13}$$

ecuaţiile undelor pentru câmpul electric şi magnetic, (1.10a) şi (1.10b), devin:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \left(\omega^2 \varepsilon^{(\delta)} \mu^{(\delta)} - \beta^2\right)\vec{E} = 0, \tag{1.14a}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \left(\omega^2 \varepsilon^{(\delta)} \mu^{(\delta)} - \beta^2\right)\vec{H} = 0. \tag{1.14b}$$

Dacă se folosesc expresiile numărului de undă longitudinal,

$$k_\delta^2 = \omega^2 \varepsilon^{(\delta)} \varepsilon \mu^{(\delta)} - \beta^2 = k_0^2 \varepsilon_{r\delta} \mu_{r\delta} - \beta^2, \tag{1.15}$$

şi ale laplace-ianului transversal exprimat în coordonate carteziene,

$$\Delta_T = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

se obţine

$$\Delta_T \vec{E} + \mathrm{k}_\delta^2 \vec{E} = 0, \tag{1.16a}$$

$$\Delta_T \vec{H} + \mathrm{k}_\delta^2 \vec{H} = 0, \tag{1.16b}$$

care reprezintă, fiecare, **ecuaţia membranei "elastice"** (ecuaţia bidimensională a undelor). Denumirea provine de la similitudinea cu ecuaţia membranei din mecanică.

Considerând ecuaţiile scalare pentru componentele axiale ale câmpului electric şi magnetic rezultă:

$$\Delta_T E_z + \mathrm{k}_\delta^2 E_z = 0, \tag{1.17a}$$

$$\Delta_T H_z + \mathrm{k}_\delta^2 H_z = 0. \tag{1.17b}$$

Ecuaţiile (1.17a) şi (1.17b) sunt cunoscute sub denumirea de **ecuaţiile Helmholtz.**

Rezolvarea ecuaţiilor (1.17a) şi (1.17b) se efectuează în mod similar prin aplicarea metodei separării variabilelor; pentru ecuația (1.17b) se consideră soluţia:

$$H_z = X(x)Y(y).$$

Înlocuind soluţia propusă în ecuaţia lui Helmholtz se obţine:

$$Y\frac{d^2X}{dx^2} + X\frac{d^2Y}{dy^2} + k_\delta^2 XY = 0$$

sau, împărţind cu *XY*:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + k_\delta^2 = 0$$

Întrucât *X(x)* este o funcţie numai de *x* şi *Y(y)* numai în funcție de *y*, din ecuaţia de mai sus rezultă că este necesar să fie îndeplinite relaţiile:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -k_x^2 \tag{1.18a}$$

şi

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -k_{y\delta}^2, \tag{1.18b}$$

în care k_x şi $k_{y\delta}$ sunt constante reale, denumite şi numere de undă transversale. Mărimile k_x şi $k_{y\delta}$ satisfac relaţia:

$$k_x^2 + k_{y\delta}^2 = k_\delta^2.$$

Soluţiile generale ale ecuaţiilor (1.18a) şi (1.18b) sunt:

$$X = A\cos k_x x + B\sin k_x x,$$

$$Y = C\cos k_{y\delta} y + D\sin k_{y\delta} y$$

Constantele A, B, C, D, k_x şi $k_{y\delta}$ se determină aplicând condiţiile la frontieră.

În mod similar se rezolvă şi cea de-a doua ecuaţie Helmholtz, în care sunt implicate componentele longitudinale ale câmpului electric.

Deoarece ecuaţiile Helmholtz sunt omogene, având proprietatea ca orice combinaţie liniară de soluţii particulare să se constituie, de asemenea, într-o soluţie, rezultă că soluţiile se determină sub forma unor serii formate din funcţii proprii, care satisfac, pe membri, ecuaţiile (1.17a) şi (1.17b), respectiv:

$$E_{z\delta}(x,y) = \sum_m A_{\delta m}\, Xe_m(x)\, Ye_{\delta m}(y), \tag{1.19a}$$

$$H_{z\delta}(x,y) = \sum_m B_{\delta m}\, Xh_m(x)\, Yh_{\delta m}(y), \tag{1.19b}$$

unde

- $A_{\delta m}$ şi $B_{\delta m}$ sunt coeficienţi necunoscuţi, evident cu valori diferite faţă de constantele A şi B utilizate în expresia soluţiei ecuaţiei (1.18a);
- $Xe_m(x) = \cos k_{xm}x$ şi $Xh_m(x) = \sin k_{xm}x$ formează un sistem de funcţii proprii (ortogonale) pe intervalul $\left[0,\ \frac{a}{2}\right]$;
- $Ye_{\delta m}(y) = \sin[\,k_{y\delta m}(y - b_\delta)]$ și $Yh_{\delta m}(y) = \cos[\,k_{y\delta m}(y - b_\delta)]$ formează, de asemenea, un sistem de funcţii proprii pe intervalul $\left[0,\ \frac{a}{2}\right]$;
- $b_1 = 0$ și $b_2 = y_2$, $m \in N^*$; $N^* = N - \{0\}$;
- $k_{xm} = \frac{m\pi}{a}$, $k_{y\delta m}^2 = k_\delta^2 - k_{xm}^2$.

Afirmaţia, conform căreia soluţiile ecuaţiilor Helmholtz sunt formate din funcţii proprii, s-a adoptat plecând de la terminologia specifică sistemului de ecuaţii, cunoscut în algebră sub forma:

$$M\vec{v} - \lambda_i \vec{v} = 0, \tag{1.20}$$

unde operatorul M este autoadjunct, în cazul de faţă o matrice de dimensiune (n×n), $\vec{v}$ este vector propriu de dimensiune (n×1), iar λ_i reprezintă valorile parametrice ale sistemului şi se constituie într-un sistem de valori proprii ($n,i \in N^*$).

De fapt, sorgintea problemei (1.20) este tot în teoria ecuaţiilor diferenţiale: soluţiile generate de sistemul liniar de ecuaţii diferenţiale:

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n$$

sau:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ . \\ . \\ . \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, \; M = (a_{ij}),$$

care poate fi considerat ca forma liniară de maximă generalitate a unei legităţi matematice care descrie comportarea sistemelor dinamice.

Faptul că matricea M este autoadjunctă (în sensul că $M^t = \bar{M}$) are, pe de o parte, semnificaţie fizică (structurile care se supun acestei legităţi sunt izotrope), iar, pe de altă parte, din punct de vedere matematic, această condiţie ne asigură că valorile proprii sunt reale. Întrucât operatorul diferenţial este de asemenea autoadjunct, se poate face corespondenţa dintre ecuaţiile Helmholtz (1.17a)÷(1.17b) şi sistemul (1.20), astfel:

$$M \to \Delta_t^2 \;, \vec{\mathrm{v}} \to E_z(H_z) \text{ şi } \lambda_i \to -k_\delta^2$$

Glisarea din domeniul matricilor în cel al ecuaţiilor diferenţiale şi invers este posibilă şi naturală.

În continuare, se vor prezenta câteva observaţii legate de faptul că ecuaţiile lui Helmholtz reprezintă o problemă de valori proprii:

- *vectorii proprii sunt ortogonali şi liniari independenţi şi pot forma baze ortogonale, iar prin normare pot forma baze ortonormate şi pot facilita astfel rezolvarea sistemului de ecuaţii integral (inclusiv determinarea coeficienţilor necunoscuţi $A_{\delta m}$* şi *$B_{\delta m}$), rezultat prin reunirea tuturor condiţiilor impuse câmpului electromagnetic din linia microstrip ecranată;*

- *funcţiile proprii, care intră în compunerea soluţiilor ecuaţiilor Helmholtz, respectiv $Xe_m(x)$, $Ye_{\delta m}(y)$, $Xh_m(x)$ şi $Yh_{\delta m}(y)$ se pot dezvolta în serii Fourier de către alte funcţii proprii ortogonale, care apar în structura sistemului de ecuaţii integral;*

- *dacă λ este valoare proprie, atunci problema neomogenă corespunzătoare*

$(M-\lambda)\vec{v}=s$, $s\neq 0$, în general, nu are soluţie;

- fenomenele descrise de o problemă de valori proprii verifică legea conservării energiei (sistemul descris de ecuaţia $m\ddot{x}+f\dot{x}+rx=0$ este neconservativ pentru $f\neq 0$, deoarece soluţia reprezintă o oscilaţie amortizată exponenţial cu factorul f sau conservativ pentru f=0) şi în consecinţă fenomenele sunt ondulatorii.

Generic vorbind, se poate aprecia că funcţiile şi valorile proprii sunt comune oricărei probleme de vibraţii şi, cum domeniul microundelor nu-şi ascunde natura ondulatorie, această abordare poate fi adecvată rezolvării ecuaţiei (1.17a) sau (1.17b).

1.3 Expresiile componentelor transversale ale câmpului electromagnetic

Componentele transversale se pot determina pornind de la componentele axiale obţinute cu ajutorul soluţiilor (1.19a) şi (1.19b), care sunt generate de ecuaţiile Helmholtz. Pentru aceasta se vor stabili relaţiile de legătură între componentele longitudinale şi cele transversale [27]:

$$\vec{E}=\vec{E}_T+\vec{e}_z E_z \tag{1.21a}$$

$$\vec{H}=\vec{H}_T+\vec{e}_z H_z \qquad \text{(1.21b}$$

unde E_T, H_T reprezintă vectorul câmp electric şi respectiv magnetic transversal, iar e_z versorul corespunzător direcţiei de propagare (axa z), paralelă cu axa liniei. Se pun în evidentă componentele transversale şi axiale ale operatorului ∇:

$$\nabla=\nabla_T+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

Ţinând seama de observaţia (1.11) şi de relaţia (1.13) operatorul ∇ ia forma:

$$\nabla=\nabla_T-\mathrm{i}\beta\vec{e}_z$$

pentru ca, apoi, în conformitate cu ecuaţiile (1.9a) şi (1.9b), relaţiile dintre componentele câmpului electromagnetic să devină:

$$(\nabla_T-\mathrm{i}\beta\vec{e}_z)\times(\vec{E}_T+\vec{e}_z E_z)=-\mathrm{i}\omega\mu^{(\delta)}(\vec{H}_T+\vec{e}_z H_z)$$
$$(\nabla_T-\mathrm{i}\beta\vec{e}_z)\times(\vec{H}_T+\vec{e}_z H_z)=\mathrm{i}\omega\varepsilon^{(\delta)}(\vec{E}_T+\vec{e}_z E_z).$$

Se separă componentele longitudinale şi transversale:

$$L:\qquad (\nabla_T\times\vec{E}_T)=-i\omega\mu^{(\delta)}\vec{e}_z H_z \tag{1.22}$$

$$T: \quad i\beta\vec{e}_z \times \vec{E}_T - \vec{e}_z \times \nabla_T E_z = -i\omega\mu^{(\delta)}\vec{H}_T \tag{1.23}$$

Considerând şi ecuaţia duală relaţiei (1.23), se obţine sistemul:

$$-i\beta\vec{e}_z \times \vec{E}_T + \vec{e}_z \times \nabla_T E_z = i\omega\mu^{(\delta)}\vec{H}_T \tag{1.24}$$

$$-i\beta\vec{e}_z \times \vec{H}_T + \vec{e}_z \times \nabla_T E_z = -i\omega\varepsilon^{(\delta)}\vec{E}_T, \tag{1.25}$$

din care se poate elimina$\vec{H}_T$, dacă se înmulţeşte relaţia (1.24), vectorial, cu $i\beta\vec{e}_z$ (pe stânga) şi ecuaţia (1.25) cu $i\omega\mu$. În consecinţă rezultă:

$$-\beta^2\vec{e}_z \times (\vec{e}_z \times \vec{E}_T) + i\beta\vec{e}_z \times (\vec{e}_z \times \nabla_T E_z) = -\omega\beta\mu^{(\delta)}(\vec{e}_z \times \vec{H}_T) \tag{1.26}$$

$$-\omega\beta\mu^{(\delta)}(\vec{e}_z \times H_z) + i\omega\mu^{(\delta)}(\vec{e}_z \times \nabla_T H_z) = \omega^2\varepsilon^{(\delta)}\mu^{(\delta)}\vec{E}_T \tag{1.27}$$

Din însumarea celor două ecuaţii, (1.26) şi (1.27), şi după dezvoltarea dublelor produse vectoriale, se obţine:

$$\beta^2\vec{E}_T - \mathrm{i}\beta\nabla_T E_z + \mathrm{i}\omega\mu^{(\delta)}(\vec{e}_z \times \nabla_T H_z) - \omega^2\varepsilon^{(\delta)}\mu^{(\delta)}\vec{E}_T = 0 \tag{1.28}$$

de unde, ţinându-se seama de expresia numărului de undă transversal, rezultă:

$$\vec{E}_T = -\frac{i\beta}{k_\delta^2}\nabla_T E_z + \frac{i\omega\mu^{(\delta)}}{k_\delta^2}\vec{e}_z \times \nabla_T H_z \tag{1.29}$$

și, respectiv, versiunea sa duală,

$$\vec{H}_T = -\frac{i\beta}{k_\delta^2}\nabla_T H_z + \frac{i\omega\varepsilon^{(\delta)}}{k_\delta^2}\vec{e}_z \times \nabla_T E_z \tag{1.30}$$

Cu ajutorul relaţiilor (1.29) şi (1.30) se obţin expresiile pentru componentele transversale ale câmpului electric şi ale câmpului magnetic:

$$E_{x\delta} = -\frac{i}{k_\delta^2}\left(\beta\frac{\partial E_{z\delta}}{\partial x} + \omega\mu_0\mu_{r\delta}\frac{\partial H_{z\delta}}{\partial y}\right) \tag{1.31a}$$

$$E_{y\delta} = -\frac{i}{k_\delta^2}\left(\beta\frac{\partial E_{z\delta}}{\partial y} - \omega\mu_0\mu_{r\delta}\frac{\partial H_{z\delta}}{\partial x}\right) \tag{1.31b}$$

$$H_{x\delta} = -\frac{i}{k_\delta^2}\left(\beta\frac{\partial H_{z\delta}}{\partial x} - \omega\varepsilon_0\varepsilon_{r\delta}\frac{\partial E_{z\delta}}{\partial y}\right) \tag{1.31c}$$

$$H_{y\delta} = -\frac{i}{k_\delta^2}\left(\beta\frac{\partial H_{z\delta}}{\partial y} + \omega\varepsilon_0\varepsilon_{r\delta}\frac{\partial E_{z\delta}}{\partial x}\right) \tag{1.31d}$$

Modul de propagare cu ambele componente axiale nule ($E_z = H_z = 0$), denumit şi **transversal electromagnetic, TEM**, poate exista în linia de transmisiune, numai dacă numărul de undă longitudinal k_δ este nul, deoarece în acest caz expresiile componentelor transversale (1.31a)÷(1.31d) apar, în primă etapă, ca nedeterminate (dacă numărul de undă nu ar fi nul, componentele transversale ar deveni nule, deci câmpul electromagnetic s-ar anula).

1.4 Formularea condiţiilor de modelare. Spaţiul Hilbert

Determinarea riguroasă a expresiei câmpului electromagnetic din linia microstrip simetrică ecranată reală, care reflectă adecvat procesele fizice din aceasta, presupune îndeplinirea condiţiilor impuse de:

- verificarea ecuaţiilor Helmholtz în cazul existenţei celor două domenii (delimitate de cele două medii dielectrice diferite);

- influenţa suprafeţei de separare dintre cele două domenii, când la traversarea acesteia trebuie asigurată continuitatea componentelor tangenţiale ale câmpului electric şi magnetic [27];

- influenţa ecranului conductor (electric), ce permite existenţa în vecinătatea sa exterioară doar a componentelor normale (la suprafaţa conductorului) ale câmpului electric şi a componentelor tangenţiale (la suprafaţa conductorului) ale câmpului magnetic, ca apoi şi unele şi celelalte să scadă brusc la zero în interiorul conductorului [27] (în consecinţă, condiţiile pe care le îndeplinesc componentele longitudinale ale câmpului magnetic şi electric pe suprafaţa ecranului electric sunt următoarele:

$$\frac{\partial H_z}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ şi } E_z = 0);$$

- influenţa ecranului magnetic, situat în planul $x=0$ (figura 1.2), ceea ce permite existenţa în vecinătatea sa doar a componentelor normale ale câmpului magnetic şi a componentelor tangenţiale ale câmpului electric [27]; în consecinţă, de data aceasta, condiţiile pe care le îndeplinesc componentele longitudinale ale câmpului magnetic şi electric sunt următoarele:

$$\frac{\partial E_z}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ şi } H_z = 0;$$

- influenţa muchiei conductorului, amplasat între cele două domenii analizate.

Rezolvarea acestei probleme se va face în condiţiile rigorii electrodinamice, în secţiunea 1.6, intitulată “Analiza electrodinamică a liniei microstrip ecranate prin metoda domeniilor parţiale”, în care se au în vedere concluziile prezentate în secţiunea 1.5, intitulată “Modelul Meixner” [28].

În continuare, trebuie stabilit cadrul matematic adecvat rezolvării problemelor de aproximare şi convergenţă care fac obiectul satisfacerii condiţiilor impuse câmpului electromagnetic în linia microstrip ecranată.

Spaţiul Hilbert, care prin definiţie este un spaţiu liniar, normat şi complet, în care norma se introduce cu ajutorul produsului scalar, se dovedeşte a fi instrumentul matematic propice pentru elaborarea studiului câmpului electromagnetic cu ajutorul metodei analitice.

În spaţiul Hilbert al funcţiilor continue şi de pătrat sumabil, convergenţa, noţiune esenţial "dinamică", este deopotrivă mai simplă şi mai “estetică”, fapt ce poate fi intuit, spre exemplu, de reprezentarea unui vector în mulţimea $\boldsymbol{R}^n$ *printr-o combinaţie liniară de versori unui sistem ortonormat.*

Norma, care se poate considera că reprezintă entitatea ce exprimă "distanţa" în matematică şi introduce acel concept fundamental al analizei matematice, denumit convergenţă, se defineşte cu ajutorul produsului scalar, astfel:

$$\|f\|^2 = (f,f) = \int_\alpha^\beta |f(t)|^2 dt < \infty \qquad (1.32)$$

Mulţimea $L_\Gamma^2[\alpha,\beta]$ *e se organizează ca spaţiu Hilbert peste corpul* $\Gamma = R, C$ *(mulţimea numerelor reale sau complexe), în raport cu operaţia de adunare a două funcţii şi de înmulţire a unei funcţii cu un scalar. Deci:*

$$L_\Gamma^2[\alpha,\beta] = \{f | f:[\alpha,\beta] \to \Gamma,\ (\exists)\|f\|^2 = \int_\alpha^\beta |f(t)|^2 dt < \infty\}$$

Pentru a descrie câmpul electromagnetic în linia microstrip, se va pleca de la următoarea premisă - axiomă [27]:

- pentru ca un câmp, notat cu $\Phi(P,t)$, o funcţie de punct, $P(x,y,z)$ şi de timp, să fie undă, eventual soluţie a ecuaţiilor Helmholtz, trebuie ca pătratul intensităţii sale, $|\Phi(P,t)|^2$, să aibă semnificaţie fizică; această funcţie se reprezintă în domeniul microundelor sub forma densităţii de energie; şi cum energia totală dintr-un domeniu finit V trebuie să fie finită, rezultă că:

$$\int_V |\Phi(\mathrm{P,t})|^2 dv < \infty, \qquad (1.33)$$

deci $\Phi(P,t)$ aparţine mulţimii $L_\Gamma^2[\alpha,\beta]$.

1.5 Modelul Meixner

Se analizează comportarea câmpului electromagnetic în apropierea muchiei conductorului, conform modelului ales, atribuit în literatura de specialitate lui Meixner ([11], [22], [28] şi figura 1.3). Geometria figurii 1.3, care evidenţiază domeniul din imediata apropiere a muchiei conductorului plasat în figura 1.2, între mediile dielectrice a fost adoptată de către Meixner în vederea realizării analizei câmpului electromagnetic cu ajutorul ecuaţiilor Maxwell în sistemul de coordonate locale cilindrice. Modelul Meixner, spre deosebire de celula elementară a liniei microstrip ecranate, care are în compunere două medii dielectrice distincte, supune analizei trei medii dielectrice cu caracteristici dielectrice şi magnetice diferite ($\varepsilon_1, \mu_1; \varepsilon_2, \mu_2$ şi ε_3, μ_3). Unghiurile φ_1, φ_2 şi φ_3 se măsoară în sensul acelor de ceasornic.

În orice domeniu finit *V*, în baza relaţiei (1.33), energia câmpului electromagnetic este finită, respectiv se respectă relaţia:

$$\int_V \left(\varepsilon^{(\delta)}|E|^2 + \mu^{(\delta)}|H|^2\right) dv < \infty, \qquad (1.34)$$

unde cu indicele $\delta = 1 \div 3$ s-au notat cele trei medii dielectrice din figura 1.3.

În vecinătatea muchiei (punctul notat cu M în figura 1.3) se postulează că valoarea integralei (1.34) trebuie să tindă spre zero. Elementul de volum din integrala (1.34), exprimat în coordonate locale cilindrice, este egal cu produsul $\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$.

Se poate observa, tot din condiţia (1.34), că în vecinătatea muchiei conductorului nici o componentă a câmpului electric sau magnetic nu poate creşte mai repede decât $\rho^{-1+\tau}$ (pentru $\tau > 0$), pentru $\rho \to 0$. Dacă, de exemplu, $\tau \leq 0$, s-ar ajunge la o situaţie inacceptabilă, respectiv atunci când volumul V ar tinde către zero, energia din acest spaţiu ar fi infinită.

Ecuaţiile Maxwell (1.9a) şi (1.9b), scrise în sistemul de coordonate locale cilindrice, au forma:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = i\omega\mu^{(\delta)} H_\rho \qquad (1.35a)$$

$$\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = i\omega\mu^{(\delta)} H_\varphi \qquad (1.35b)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\rho E_\varphi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\rho}{\partial \varphi} = i\omega\mu^{(\delta)} H_z \qquad (1.35c)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = -i\omega\varepsilon^{(\delta)} E_\rho \qquad (1.35d)$$

$$\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = -i\omega\varepsilon^{(\delta)} E_\varphi \tag{1.35e}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\rho H_\varphi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi} = -i\omega\varepsilon^{(\delta)} E_z \tag{1.35f}$$

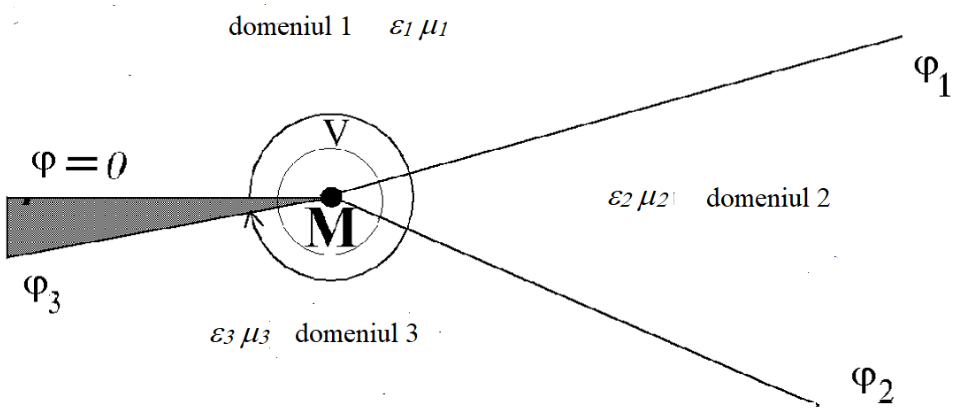


Figura 1.3 Modelul Meixner pentru determinarea ordinului maxim al singularităţii soluţiilor sistemului de ecuaţii (1.35a) şi (1.35b).

Soluţiile sistemului de ecuaţii (1.35a)÷(1.35f), determinate pentru domeniile unghiulare 1, 2 şi 3 (conform figurii 1.3), pot fi reprezentate sub forma unor serii ce ţin cont de observaţia că nici o componentă a câmpului electric sau magnetic nu poate creşte mai repede decât $\rho^{-1+\tau}$ (pentru $\tau > 0$), pentru $\rho \to 0$ [28]:

$$E_\rho^{(\delta)} = \rho^{-1+\tau}[a_0^{(\delta)} + a_1^{(\delta)}\rho + a_2^{(\delta)}\rho^2 + \ldots] = \rho^{-1+\tau}\sum_k a_k^{(\delta)}\rho^k \tag{1.36a}$$

$$E_\varphi^{(\delta)} = \rho^{-1+\tau}[b_0^{(\delta)} + b_1^{(\delta)}\rho + b_2^{(\delta)}\rho^2 + \ldots] = \rho^{-1+\tau}\sum_k b_k^{(\delta)}\rho^k \tag{1.36b}$$

$$E_z^{(\delta)} = \rho^{-1+\tau}[c_0^{(\delta)} + c_1^{(\delta)}\rho + c_2^{(\delta)}\rho^2 + \ldots] = \rho^{-1+\tau}\sum_k c_k^{(\delta)}\rho^k \tag{1.36c}$$

$$H_\rho^{(\delta)} = \rho^{-1+\tau}[A_0^{(\delta)} + A_1^{(\delta)}\rho + A_2^{(\delta)}\rho^2 + \ldots] = \rho^{-1+\tau}\sum_k A_k^{(\delta)}\rho^k \tag{1.37a}$$

$$H_\varphi^{(\delta)} = \rho^{-1+\tau}[B_0^{(\delta)} + B_1^{(\delta)}\rho + B_2^{(\delta)}\rho^2 + \ldots] = \rho^{-1+\tau}\sum_k B_k^{(\delta)}\rho^k \tag{1.37b}$$

$$H_z^{(\delta)} = \rho^{-1+\tau}[C_0^{(\delta)} + C_1^{(\delta)}\rho + C_2^{(\delta)}\rho^2 + \ldots] = \rho^{-1+\tau}\sum_k C_k^{(\delta)}\rho^k \tag{1.37c}$$

Coeficienţii $a_k^{(\delta)}$, $b_k^{(\delta)}$, $c_k^{(\delta)}$, $A_k^{(\delta)}$, $B_k^{(\delta)}$ şi $C_k^{(\delta)}$ depind doar de coordonatele φ şi z.

Înlocuind soluţiile propuse (1.36a)÷(1.36c) şi (1.37a)÷(1.37c) în sistemul de ecuaţii (1.35a)÷(1.35f) şi apoi prin identificarea coeficienţilor corespunzători puterilor lui ρ, se obţine (suficient, dar nu şi necesar) un set de relaţii, care vor fi prezentate în continuare. Prin aceasta se urmăreşte **aflarea valorii minime pozitive a lui τ, care va decide limita superioară a ordinului de singularitate a componentelor câmpului electromagnetic**. Conform metodologiei prezentate, ecuaţia (1.35a) se scrie astfel:

$$\frac{1}{\rho}\left[\rho^{-1+\tau}\left(\frac{\partial c_0^{(\delta)}}{\partial\varphi}+\rho\frac{\partial c_1^{(\delta)}}{\partial\varphi}+\ldots\right)\right]-\left[\rho^{-1+\tau}\left(\frac{\partial b_0^{(\delta)}}{\partial z}+\rho\frac{\partial b_1^{(\delta)}}{\partial z}+\ldots\right)\right]=$$
$$=i\omega\mu^{(\delta)}\left[\rho^{-1+\tau}\left(A_0^{(\delta)}+\rho A_1^{(\delta)}+\ldots\right)\right] \qquad (1.38)$$

În urma identificării coeficienţilor corespunzători puterilor egale ale lui ρ se obţine (ca o condiţie suficientă, nu şi necesară):

- pentru coeficienţii lui $\rho^{-2+\tau}$:

$$\frac{\partial c_0^{(\delta)}}{\partial\varphi}=0;$$

- pentru coeficienţii lui $\rho^{-1+\tau}$

$$\frac{\partial c_1^{(\delta)}}{\partial\varphi}-\frac{\partial b_0^{(\delta)}}{\partial z}=i\omega\mu^{(\delta)}A_0^{(\delta)};$$

- pentru coeficienţii lui ρ^{τ}:

$$\frac{\partial c_2^{(\delta)}}{\partial\varphi}-\frac{\partial b_1^{(\delta)}}{\partial z}=i\omega\mu^{(\delta)}A_1^{(\delta)}$$

ş.a.m.d.

Pentru cea de-a doua ecuaţie din sistemul (1.35) se scrie:

$$\rho^{-1+\tau}\left(\frac{\partial a_0^{(\delta)}}{\partial z}+\rho\frac{\partial a_1^{(\delta)}}{\partial z}+\ldots\right)-\left[(-1+\tau)\rho^{-2+\tau}c_0^{(\delta)}+\tau\rho^{-1+\tau}c_1^{(\delta)}+\ldots\right]=$$
$$=i\omega\mu^{(\delta)}\left[\rho^{-1+\tau}\left(B_0^{(\delta)}+\rho B_1^{(\delta)}+\ldots\right)\right] \qquad (1.39)$$

Prin identificare se obţine:

- pentru coeficienţii lui $\rho^{-2+\tau}$:

$$(-1+\tau)c_0^{(\delta)}=0;$$

- pentru coeficienţii lui $\rho^{-1+\tau}$:

$$\frac{\partial a_0^{(\delta)}}{\partial z} - \tau c_1^{(\delta)} = i\omega\mu^{(\delta)} B_0^{(\delta)}$$

ş. a. m. d.

Corespunzător celei de-a treia ecuaţii din sistemul (1.35) se poate scrie:

$$\frac{1}{\rho}\left[\rho^{-1+\tau}\left(\tau b_0^{(\delta)} + (\tau+1) b_1^{(\delta)}\rho + \ldots\right)\right] - \frac{1}{\rho}\left[\rho^{-1+\tau}\left(\frac{\partial a_0^{(\delta)}}{\partial\varphi} + \rho\frac{\partial a_1^{(\delta)}}{\partial\varphi} + \ldots\right)\right] = = i\omega\mu^{(\delta)}\left[\rho^{-1+\tau}\left(C_0^{(\delta)} + \rho C_1^{(\delta)} + \ldots\right)\right], \tag{1.40}$$

iar prin identificare se obţine:

- pentru coeficienţii lui $\rho^{-2+\tau}$:

$$\tau b_0^{(\delta)} - \frac{\partial a_0^{(\delta)}}{\partial\varphi} = 0$$

- pentru coeficienţii $\rho^{-1+\tau}$:

$$(\tau+1) b_1^{(\delta)} - \frac{\partial a_1^{(\delta)}}{\partial\varphi} = i\omega\mu^{(\delta)} C_1^{(\delta)}$$

ş. a. m. d.

De asemenea, pentru cea de-a patra ecuaţie din sistemul (1.35) se poate scrie:

$$\frac{1}{\rho}\left[\rho^{-1+\tau}\left(\frac{\partial C_0^{(\delta)}}{\partial\varphi} + \rho\frac{\partial C_1^{(\delta)}}{\partial\varphi} + \ldots\right)\right] - \left[\rho^{-1+\tau}\left(\frac{\partial B_0^{(\delta)}}{\partial z} + \rho\frac{\partial B_1^{(\delta)}}{\partial z} + \ldots\right)\right] = = -i\omega\varepsilon^{(\delta)}\left[\rho^{-1+\tau}\left(a_0^{(\delta)} + \rho a_1^{(\delta)} + \ldots\right)\right], \tag{1.41}$$

iar prin identificare se obţine:

- pentru coeficienţii lui $\rho^{-2+\tau}$:

$$\frac{\partial C_0^{(\delta)}}{\partial\varphi} = 0;$$

- pentru coeficienţii lui $\rho^{-1+\tau}$:

$$\frac{\partial C_1^{(\delta)}}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_0^{(\delta)}}{\partial z} = -\,i\omega\varepsilon^{(\delta)} a_0^{(\delta)}$$

- pentru coeficienţii lui ρ^{τ}:

$$\frac{\partial C_2^{(\delta)}}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_1^{(\delta)}}{\partial z} = -\,i\omega\varepsilon^{(\delta)} a_1^{(\delta)}$$

ş. a. m. d.

Corespunzător celei de-a cincea ecuaţii din sistemul (1.35) se scrie:

$$\rho^{-1+\tau}\left(\frac{\partial A_0^{(\delta)}}{\partial z} + \rho\frac{\partial A_1^{(\delta)}}{\partial z} + \ldots\right) - \left[(-1+\tau)\rho^{-2+\tau} C_0^{(\delta)} + \tau\rho^{-1+\tau} C_1^{(\delta)} + \ldots\right] = \\ = -i\omega\varepsilon^{(\delta)}\left[\rho^{-1+\tau}\left(b_0^{(\delta)} + \rho b_1^{(\delta)} + \ldots\right)\right] \qquad (1.42)$$

Prin identificare se obţine:

-pentru coeficienţii lui $\rho^{-2+\tau}$:

$$(-1+\tau)C_0^{(\delta)} = 0$$

-pentru coeficienţii lui $\rho^{-1+\tau}$:

$$\frac{\partial A_0^{(\delta)}}{\partial \varphi} - \tau C_1^{(\delta)} = -\,i\omega\varepsilon^{(\delta)} b_0^{(\delta)}$$

ş. a. m. d.

În sfârşit, corespunzător ultimei ecuaţii din sistemul (1.35) se scrie:

$$\frac{1}{\rho}\left[\rho^{-1+\tau}\left(\tau B_0^{(\delta)} + (\tau+1)B_1^{(\delta)}\rho + \ldots\right)\right] - \frac{1}{\rho}\left[\rho^{-1+\tau}\left(\frac{\partial A_0^{(\delta)}}{\partial \varphi} + \rho\frac{\partial A_1^{(\delta)}}{\partial \varphi} + \ldots\right)\right] = \\ = -i\omega\varepsilon^{(\delta)}\left[\rho^{-1+\tau}\left(c_0^{(\delta)} + \rho c_1^{(\delta)} + \ldots\right)\right], \qquad (1.43)$$

iar prin identificare de obţine:

-pentru coeficienţii lui $\rho^{-2+\tau}$:

$$\tau B_0^{(\delta)} - \frac{\partial A_0^{(\delta)}}{\partial \varphi} = 0;$$

-pentru coeficienţii lui $\rho^{-1+\tau}$:

$$(\tau+1)B_1^{(\delta)} - \frac{\partial A_1^{(\delta)}}{\partial \varphi} = -\, i\omega\varepsilon^{(\delta)} c_1^{(\delta)}$$

ş. a. m. d.

Din relaţiile rezultate prin identificarea coeficienţilor se reţin următoarele:

$$(-1+\tau)c_0^{(\delta)} = 0 \tag{1.44a}$$

$$\frac{\partial c_1^{(\delta)}}{\partial \varphi} - \frac{\partial b_0^{(\delta)}}{\partial z} = i\omega\mu^{(\delta)} A_0^{(\delta)} \tag{1.44b}$$

$$\frac{\partial a_0^{(\delta)}}{\partial z} - \tau c_1^{(\delta)} = i\omega\mu^{(\delta)} B_0^{(\delta)} \tag{1.44c}$$

$$\tau b_0^{(\delta)} - \frac{\partial a_0^{(\delta)}}{\partial \varphi} = 0 \tag{1.44d}$$

$$(-1+\tau)C_0^{(\delta)} = 0 \tag{1.45a}$$

$$\frac{\partial C_1^{(\delta)}}{\partial \varphi} - \frac{\partial \mathrm{B}_0^{(\delta)}}{\partial \mathrm{z}} = -i\omega\varepsilon^{(\delta)} a_0^{(\delta)} \tag{1.45b}$$

$$\frac{\partial A_0^{(\delta)}}{\partial z} - \tau C_1^{(\delta)} = -i\omega\varepsilon^{(\delta)} b_0^{(\delta)} \tag{1.45c}$$

$$\tau B_0^{(\delta)} - \frac{\partial A_0^{(\delta)}}{\partial \varphi} = 0 \tag{1.45d}$$

Din relaţiile (1.44a) şi (1.45a) rezultă:

$$\tau = 1 \ \text{ sau } \ c_0^{(\delta)} = C_0^{(\delta)} = 0.$$

Particularizând soluţiile (1.36c) şi (1.37c) pentru $\tau = 1$ sau $c_0^{(\delta)}$=$C_0^{(\delta)}$=0 se ajunge la concluzia că în vecinătatea muchiei conductorului, componentele longitudinale ale câmpului electromagnetic nu admit singularităţi şi sunt finite.

Relaţiile (1.45b), (1.45c) şi (1.45d) se supun unor transformări, după cum urmează: prima se înmulţeşte cu τ, a doua se diferenţiază în raport cu φ, în sfârşit, ultima se diferenţiază în raport cu z şi se obţine:

$$\tau\frac{\partial C_1^{(\delta)}}{\partial \varphi} - \tau\frac{\partial B_0^{(\delta)}}{\partial z} = -i\omega\tau\varepsilon^{(\delta)} a_0^{(\delta)},$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial A_0^{(\delta)}}{\partial z} - \tau \frac{\partial C_1^{(\delta)}}{\partial \varphi} = -i\omega\varepsilon^{(\delta)}\frac{\partial b_0^{(\delta)}}{\partial \varphi},$$

$$\tau \frac{\partial B_0^{(\delta)}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial A_0^{(\delta)}}{\partial \varphi} = 0.$$

Dacă în ultima ecuaţie se inversează ordinea de diferenţiere la termenul care conţine coeficientul $A_0^{(\delta)}$ şi apoi se adună ecuaţia obţinută cu celelalte două, se obţine, evident pentru $\omega \neq 0$:

$$\frac{\partial b_0^{(\delta)}}{\partial \varphi} + \tau a_0^{(\delta)} = 0. \tag{1.46}$$

Dacă se substituie $b_0^{(\delta)}$ din relaţia (1.46) în conformitate cu expresia sa din relaţia (1.44d) rezultă, ecuaţia diferenţială:

$$\frac{\partial^2 a_0^{(\delta)}}{\partial \varphi^2} + \tau^2 a_0^{(\delta)} = 0, \tag{1.47}$$

a cărei soluţie generală este

$$a_0^{(\delta)} = p^{(\delta)} \sin \tau\varphi + q^{(\delta)} \cos \tau\varphi \tag{1.48}$$

Procedând în mod analog cu ecuaţiile duale se obţine ecuaţia diferenţială:

$$\frac{\partial^2 A_0^{(\delta)}}{\partial \varphi^2} + \tau^2 A_0^{(\delta)} = 0 \tag{1.49}$$

a cărei soluţie generală este:

$$A_0^{(\delta)} = P^{(\delta)} \sin \tau\varphi + \ Q^{(\delta)} \cos \tau\varphi. \tag{1.50}$$

Introducând soluţiile (1.48) şi (1.50) în relaţiile (1.44d) şi (1.45d), pentru $\tau > 0$ rezultă:

$$b_0^{(\delta)} = p^{(\delta)} \cos \tau\varphi - q^{(\delta)} \sin \tau\varphi, \tag{1.51}$$

$$B_0^{(\delta)} = P^{(\delta)} \cos \tau\varphi - \ Q^{(\delta)} \sin \tau\varphi \ . \tag{1.52}$$

Din relaţia (1.44c) rezultă:

$$c_1^{(\delta)} = \frac{\partial a_0^{(\delta)}}{r \partial z} - \frac{1}{\tau} i\omega\mu^{(\delta)} B_0^{(\delta)} \tag{1.53}$$

iar prin înlocuirea valorilor lui $a_0^{(\delta)}$ şi $B_0^{(\delta)}$ conform soluţiilor din (1.48) şi (1.52), se obţine:

$$c_1^{(\delta)} = \frac{1}{\tau}\left[\frac{\partial p^{(\delta)}}{\partial z} sin\,\tau\,\varphi \;+ \frac{\partial q^{(\delta)}}{\partial z} cos\,\tau\,\varphi\right] -$$

$$-\frac{1}{\tau} i\omega\mu^{(\delta)}\left[P^{(\delta)}\cos\tau\varphi - \;Q^{(\delta)}\sin\tau\varphi\,\right] \tag{1.54}$$

În mod analog, se obţine relaţia corespunzătoare coeficientului $C_1^{(\delta)}$, respectiv:

$$C_1^{(\delta)} = \frac{1}{\tau}\left[\frac{\partial P^{(\delta)}}{\partial z} sin\,\tau\,\varphi \;+ \frac{\partial Q^{(\delta)}}{\partial z} cos\,\tau\,\varphi\right]$$

$$+\frac{1}{\tau} i\varepsilon\mu^{(\delta)}\left[p^{(\delta)}\cos\tau\varphi - \;q^{(\delta)}\sin\tau\varphi\,\right] \tag{1.55}$$

Deoarece indicele δ primeşte valorile 1, 2 şi 3, corespunzătoare mediilor dielectrice din figura 1.3, ecuaţiile (1.48), (1.50)÷(1.52), (1.54) şi (1.55) conduc la optsprezece ecuaţii cu treizeci coeficienţi necunoscuţi:

$$\{a_0^{(\delta)}, b_0^{(\delta)}, c_1^{(\delta)}, A_0^{(\delta)}, B_0^{(\delta)}, C_1^{(\delta)}, p^{(\delta)}, q^{(\delta)}, P^{(\delta)}, Q^{(\delta)}\}, \delta = 1 \div 3.$$

Celelalte ecuaţii necesare rezolvării sistemului se obţin particularizând ecuaţiile pentru $\varphi=0$, $\varphi=\varphi_1$, $\varphi=\varphi_2$ şi $\varphi=\varphi_3$ (se va ţine cont de faptul că pe muchiile conductorului, pentru $\varphi=0$ şi $\varphi=\varphi_3$, componentele tangenţiale ale câmpului electric sunt egale cu zero, precum şi de continuitatea componentelor tangenţiale ale câmpului electric şi magnetic pentru $\varphi=\varphi_1$ şi $\varphi=\varphi_2$, la suprafaţa de separare dintre două medii dielectrice).

În urma rezolvării netriviale a sistemului şi în urma eliminării succesive a necunoscutelor, se determină faptul că acesta este compatibil în cazul îndeplinirii uneia din condiţiile de mai jos [28]:

$$1)\; a_0^{(\delta)} = b_0^{(\delta)} = c_0^{(\delta)} = \;C_0^{(\delta)} = 0;\;\; \delta = 1 \div 3 \tag{1.56a}$$

$$F_\mu(\tau) = 0, \tag{1.56b}$$

unde: