

**Prof. univ. dr. ing. Mircea DEGERATU**  
Laureat al premiului Hermann Oberth  
al Academiei Oamenilor de Știință din România

**Conf. univ. dr. ing. Nicolae Ioan ALBOIU**

# **ELEMENTE DE MECANICA FLUIDELOR COMPRESIBILE ȘI NOȚIUNI DE AERODINAMICA VITEZELOR MARI**

EDITURA  
  
ACADEMIEI OAMENILOR DE ȘTIINȚĂ  
DIN ROMÂNIA

  
EDITURA  
TEHNICA

București, 2023

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României**

**DEGERATU, MIRCEA**

**Elemente de mecanica fluidelor compresibile și noțiuni de aerodinamica vitezelor mari** / prof. univ. dr. ing. Mircea Degeratu, conf. univ. dr. ing. Nicolae Ioan Alboiu. - București : Editura Academiei Oamenilor de Știință din România : Editura Tehnică, 2023

Conține bibliografie

ISBN 978-630-6518-02-9

ISBN 978-973-31-2409-2

I. Alboiu, Nicolae Ioan

## PREFAȚĂ

Aplicațiile curgerii gazelor cu viteze mari au luat, în ultimul timp, un avânt foarte mare astfel încât nu mai este astăzi posibil să se trateze problemele de aero-gazodinamică fără a se ține cont de vitezele considerabile atinse în diversele instalații moderne, ceea ce implică introducerea efectului de compresibilitate, a aerului sau a gazelor la modul general, în stabilirea relațiilor specifice mișcării fluidelor compresibile.

În prezenta lucrare, s-a propus a se dezvolta o serie de probleme actuale ale fluidelor compresibile, atât sub aspect teoretic, cât și mai ales sub acela al aplicațiilor la problemele curente întâlnite în domeniile practice, rămânând bineînțeles în cadrul modelului fluidelor perfecte.

Cartea de față a fost organizată în patru părți plus anexe, după cum urmează.

În partea I, intitulată *Elemente generale de dinamica fluidelor compresibile*, după o introducere în domeniul mișcării permanente irotaționale a fluidelor compresibile necesară pentru simplificarea expunerii ulterioare și pentru o înțelegere mai ușoară a fenomenelor studiate, sunt prezentate mărimi și elemente caracteristice studiului fluidelor compresibile.

Partea a II-a, intitulată *Curgeri izentropice pentru fluide compresibile*, se referă la curgerea izentropică unidimensională și la teorema lui Hugoniot, precum și la curgerile izentropice prin ajutajele convergente și convergent-divergente.

Partea a III-a, intitulată *Evoluții și curgeri adiabatice ireversibile*, abordează atât studiul evoluțiilor adiabatice ireversibile de tipul undelor de șoc drepte și oblice, cât și studiul curgerilor adiabatice cu frecare de tipul curgerilor Fanno.

Partea a IV-a, intitulată *Noțiuni de bază privind aerodinamica vitezelor mari*, tratează atât curgerile subsonice cu viteze mari cât și curgerile transonice, supersonice și hipersonice, prezentându-se și diferitele instalații de tip suflerie și de tip tub de șoc pentru cercetări de aerodinamică la viteze mari.

În anexe, sunt prezentate două aplicații, prima notată cu A1 și numită *Aplicație privind ajutajul convergent. Instalație de preparare a amestecurilor de gaze în flux continuu* și a doua notată cu A2 și numită *Aplicație privind ajutajul convergent-divergent. Propulsor reactiv cu gaz comprimat*.

Trebuie menționat faptul că s-a considerat utilă folosirea, în mod corelat, a unor noțiuni aparținând și altor discipline tehnice generale precum Fizica, Mecanica, Termotehnica, Rezistența materialelor etc.

S-a căutat să se expună întreaga lucrare ca o privire unitară, existând preocuparea, în special, ca problemele tratate să decurgă unele din altele, într-un mod rațional, pentru ca înțelegerea să devină cât mai accesibilă.

Cartea este destinată, în principal, cadrelor didactice care predau Mecanica fluidelor, Hidraulica, Termodinamica și Termohidraulica fluidelor compresibile, dar și studenților care au aceste discipline în programa universitară.

De asemenea, lucrarea se mai adresează cercetătorilor în domeniul fluidelor compresibile și curgerilor cu viteze mari, specialiștilor în aerodinamică aeronautică și neaeronautică, precum și specialiștilor în instalații cu fluide compresibile de tipul instalațiilor de gaze naturale, de aer comprimat, de gaze medicale și de gaze utilizate în sistemele hiperbare.

Autorii

# CUPRINS

## Partea I ELEMENTE GENERALE DE DINAMICA FLUIDELOR COMPRESIBILE

<b>1. Mișcarea permanentă irotațională a unui fluid compresibil nevâscos</b>	<b>13</b>
1.1. Utilizarea ecuațiilor generale ale mecanicii fluidelor	13
1.2. Interpretarea energetică a ecuației curgerii permanente irotaționale a fluidelor compresibile nevâscoase	15
1.3. Integrarea pentru cazul curgerii izentropice a gazului perfect	16
<b>2. Studiul curgerii permanente a unui fluid compresibil</b>	<b>21</b>
2.1. Lucrul mecanic al forțelor interioare pentru un fluid compresibil	21
2.1.1. Cazul unui fluid nevâscos	21
2.1.2. Cazul unui fluid vâscos	22
2.2. Ecuația generală pentru un fluid compresibil vâscos	22
2.3. Ecuația generală derivând din primul principiu al termodinamicii	24
2.3.1. Cazul fluidului vâscos aflat în curgere adiabatică	24
2.3.2. Cazul gazului aflat în curgere adiabatică ireversibilă	25
<b>3. Mărimi și elemente caracteristice studiului fluidelor compresibile</b>	<b>27</b>
3.1. Starea generatoare (starea „de recipient”)	27
3.2. Definierea numărului lui Mach. Clasificarea curgerilor	28
3.3. Relații între mărimile caracteristice stării generatoare și mărimile caracteristice ale unei stări curențe	28
3.4. Relații între mărimile caracteristice a două puncte din curgere	30
3.5. Starea critică	31
<b>4. Punct de frânare pentru o curgere izentropică subsonică. Viteza limită</b>	<b>33</b>
4.1. Caracteristicile punctului de frânare	33
4.2. Măsurarea vitezei locale la curgerea unui fluid compresibil	35

4.3.	Existența unei viteze limită	38
4.4.	Cazul unei curgeri supersonice	39
<b>Partea a II-a CURGERI IZENTROPICE PENTRU FLUIDE COMPRESIBILE</b>		
<b>5.</b>	<b>Curgere izentropică unidimensională</b>	<b>43</b>
5.1.	Ecuțiile necesare rezolvării unei curgeri compresibile, izentropice, unidimensionale	43
5.2.	Determinarea variației secțiunii curentului de fluid în lungul curgerii	44
<b>6.</b>	<b>Teorema lui Hugoniot</b>	<b>47</b>
<b>7.</b>	<b>Curgerea izentropică prin ajutorul convergent</b>	<b>51</b>
7.1.	Debitul masic în ajutorul convergent	51
7.2.	Prezentarea fenomenelor care au loc în ajutorul convergent	55
7.3.	Debitul masic maxim prin ajutorul convergent	57
<b>8.</b>	<b>Curgerea izentropică prin ajutorul convergent – divergent</b>	<b>61</b>
8.1.	Studiul divergentului aferent ajutorului Laval	61
8.2.	Studiul variației de presiune și viteză în ajutorul convergent-divergent	63
<b>Partea a III-a EVOLUȚII ȘI CURGERI ADIABATICE IREVERSIBILE</b>		
<b>9.</b>	<b>Curgerea adiabatică cu frecare (ireversibilă) a unui gaz perfect într-o conductă (curgerea Fanno)</b>	<b>69</b>
9.1.	Ecuțiile de bază pentru curgerea adiabatică ireversibilă	69
9.2.	Relații diferențiale ale curgerii	72
9.3.	Integrarea ecuațiilor între două secțiuni ale curentului de fluid	75
9.4.	Calcul practice utilizând tabelul Fanno	77
<b>10.</b>	<b>Propagarea perturbațiilor. Rolul particular al vitezei sunetului</b>	<b>83</b>
<b>11.</b>	<b>Unda de șoc dreaptă</b>	<b>87</b>
11.1.	Ecuțiile de bază ale studiului undei de șoc drepte	87
11.2.	Relații de legătură între mărimile caracteristice secțiunilor din amonte și din aval față de unda de șoc dreaptă	88
11.3.	Relația lui Prandtl pentru unda de șoc dreaptă	91
11.4.	Determinarea rapoartelor mărimilor caracteristice ale undei de șoc drepte funcție de numărul Mach din amonte	92

11.5.	Determinarea rapoartelor mărimilor caracteristice ale undei de șoc drepte funcție de numărul Mach din amonte și de numărul Mach din aval	93
<b>12.</b>	<b>Unda de șoc oblică</b>	<b>95</b>
12.1.	Generalități privind unda de șoc oblică	95
12.2.	Analiza compresiei prin undă de șoc oblică	96
12.3.	Curgerea supersonică în jurul unui obstacol ascuțit la vârf	99
12.3.1.	Curgerea supersonică în jurul unui diedru	99
12.3.2.	Curgerea supersonică axial simetrică în jurul unui con	101
12.4.	Reflexia și refracția undelor de șoc oblice	102
12.5.	Detenta prin undă de șoc oblică	103
12.6.	Aplicația undei de șoc oblice la studiul descriptiv al jetului supersonic de la ieșirea dintr-un ajutoraj	103
12.7.	Regimul undelor în divergentul unui ajutoraj Laval	105
<b>Partea a IV-a NOȚIUNI DE BAZĂ PRIVIND AERODINAMICA VITEZELOR MARI</b>		
<b>13.</b>	<b>Noțiuni de aerodinamica vitezelor mari</b>	<b>111</b>
13.1.	Curgerea în întregime subsonică	111
13.2.	Curgerea transonică	112
13.2.1.	Unda de șoc $\lambda$ (lambda)	112
13.2.2.	Variația coeficienților $C_x$ și $C_z$ în funcție de Mach infinit amonte	114
13.3.	Curgerea supersonică	115
13.3.1.	Tranziția de la curgerea transonică la curgerea supersonică	115
13.3.2.	Curgerea supersonică pură	115
13.4.	Curgerea hipersonică	117
13.4.1.	Caracteristicile mișcării hipersonice	117
13.4.2.	Culoarul de viteze pentru vehiculul hipersonic fără propulsie	118
<b>14.</b>	<b>Măsurarea parametrilor curgerilor cu viteze mari</b>	<b>121</b>
14.1.	Măsurarea presiunilor	121
14.1.1.	Măsurarea presiunii statice	121
14.1.2.	Măsurarea presiunii totale	122

14.1.3.	Măsurarea presiunii în regim nepermanent cu traductoare de presiune	123
14.2.	Măsurarea vitezelor și a numărului Mach	125
14.3.	Măsurarea temperaturilor	126
14.3.1.	Generalități	126
14.3.2.	Sonde pentru măsurarea temperaturii	128
<b>15.</b>	<b>Metode optice pentru vizualizarea mișcării fluidelor compresibile în jurul corpurilor</b>	<b>131</b>
15.1.	Metoda umbrelor	131
15.2.	Metoda strioscopică	133
15.3.	Metoda interferometrică	134
<b>16.</b>	<b>Instalații experimentale pentru teste aerodinamice la viteze mari</b>	<b>137</b>
16.1.	Suflerii de viteze mari subsonice	137
16.2.	Suflerii transonice	138
16.3.	Suflerii supersonice	140
16.4.	Suflerii hipersonice	142
16.5.	Tuburi de șoc	144
<b>APLICAȚII</b>		
<b>A1.</b>	<b>Aplicație privind ajutorul convergent. Instalație de preparare a amestecurilor de gaze în flux continuu</b>	<b>149</b>
A1.1.	Descrierea instalației pentru prepararea amestecurilor ternare TRIMIX	149
A1.2.	Descrierea funcționării blocului de control BC și a blocului de injecție masică BIM	152
A1.3.	Relații de calcul utilizate pentru modelarea proceselor gazodinamice aferente instalației	154
A1.3.1.	Relații pentru calculul diametrelor ajutorajelor de injecție masică de pe cele trei linii	154
A1.3.2.	Relații pentru calculul debitelor masice și volumice și pentru calculul presiunilor de alimentare a ajutorajelor de injecție masică de pe cele trei linii, prin calculul termodinamic al ajutorajelor	156
A1.3.3.	Relații pentru calculul diametrelor diaframelor de măsură și pentru calculul debitelor masice pe cele trei linii funcție de aria colului ajutorajelor	158



A1.3.4.	Relații pentru calculul debitului masic de amestec injectat și a participațiilor masice și volumice ale componentelor, pentru amestecurile NITROX, HELIOX și TRIMIX	160
A1.3.5.	Condițiile de funcționare în regim critic a ajutorajelor de injecție masică de pe cele trei linii	162
A1.3.6.	Relații practice de calcul a ariei și diametrului colului ajutorajului de injecție masică, a debitului masic injectat și a presiunii de alimentare a ajutorajului, prin calculul ajutorajului sonic	164
<b>A2.</b>	<b>Aplicație privind ajutorajul convergent-divergent. Propulsor reactiv cu gaz comprimat</b>	<b>167</b>
A2.1.	Definirea propulsorului reactiv tip ajutoraj convergent – divergent	167
A2.2.	Calculul general al propulsorului reactiv de tipul ajutorajului convergent – divergent	168
A2.3.	Calculul propulsorului reactiv tip ajutoraj convergent - divergent funcționând cu Aer	171
A2.3.1.	Relații de calcul pentru ajutorajul convergent - divergent al propulsorului funcționând cu Aer	172
A2.3.2.	Sumar de relații de calcul pentru ajutorajul convergent – divergent al propulsorului funcționând cu Aer	173
A2.4.	Calcul propulsorului reactiv tip ajutoraj convergent – divergent funcționând cu Helium	174
A2.4.1.	Relații de calcul pentru ajutorajul convergent - divergent al propulsorului funcționând cu Helium	175
A2.4.2.	Sumar de relații de calcul pentru ajutorajul convergent – divergent al propulsorului funcționând cu Helium	176
A2.5.	Calcul propulsorului reactiv tip ajutoraj convergent – divergent funcționând cu Hidrogen	177
A2.5.1.	Relații de calcul pentru ajutorajul convergent - divergent al propulsorului funcționând cu Hidrogen	178
A2.5.2.	Sumar de relații de calcul pentru ajutorajul convergent – divergent al propulsorului funcționând cu Hidrogen	179
<b>BIBLIOGRAFIE</b>		<b>181</b>



## **Partea I.**

### **ELEMENTE GENERALE DE DINAMICA FLUIDELOR COMPRESIBILE**

- 1. MIȘCAREA PERMANENTĂ IROTAȚIONALĂ A UNUI FLUID COMPRESIBIL NEVÂSCOS**
- 2. STUDIUL CURGERII PERMANENTE A UNUI FLUID COMPRESIBIL**
- 3. MĂRIMI ȘI ELEMENTE CARACTERISTICE STUDIULUI FLUIDELOR COMPRESIBILE**
- 4. PUNCT DE FRÂNARE PENTRU O CURGERE IZENTROPICĂ SUBSONICĂ. VITEZA LIMITĂ**



---

## MIȘCAREA PERMANENTĂ IROTAȚIONALĂ A UNUI FLUID COMPRESIBIL NEVÂSCOS

### 1.1. UTILIZAREA ECUAȚIILOR GENERALE DIN MECANICA FLUIDELOR

Se pornește de la ecuațiile generale ale mișcării unui fluid nevâscos, sub forma Lamb – Helmholtz a ecuațiilor Euler.

Se consideră ecuațiile generale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_x}{\partial t} + \begin{vmatrix} \Omega_y & \Omega_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} &= -\frac{\partial e}{\partial x} \\ \frac{\partial w_y}{\partial t} + \begin{vmatrix} \Omega_z & \Omega_x \\ w_z & w_x \end{vmatrix} &= -\frac{\partial e}{\partial y} \\ \frac{\partial w_z}{\partial t} + \begin{vmatrix} \Omega_x & \Omega_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix} &= -\frac{\partial e}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.1)$$

unde:

$\vec{w}(w_x, w_y, w_z)$  - viteza locală;

$\vec{\Omega}(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$  - rotorul vitezei locale;

$e(e_x, e_y, e_z)$  - energia specifică totală (pe unitatea de masă) a particulei fluide

$$\left( e = \pi + \mathcal{P} + \frac{w^2}{2} \right);$$

$\pi$  - potențialul forțelor masice  $\left( f_x = -\frac{\partial \pi}{\partial x}; f_y = -\frac{\partial \pi}{\partial y}; f_z = -\frac{\partial \pi}{\partial z} \right);$

$\mathcal{P}$  - funcția de presiune pentru regimul barotrop  $\left( d\mathcal{P} = \frac{dp}{\rho} \right);$

$p$  - presiunea hidrodinamică.

Ecuțiile (1.1) pot fi scrise și sub forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_x}{\partial t} + \left| \begin{array}{c} \Omega_y \\ w_y \end{array} \right| \frac{\Omega_z}{w_z} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{w^2}{2} \right) &= f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial w_y}{\partial t} + \left| \begin{array}{c} \Omega_z \\ w_z \end{array} \right| \frac{\Omega_x}{w_x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{w^2}{2} \right) &= f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w_z}{\partial t} + \left| \begin{array}{c} \Omega_x \\ w_x \end{array} \right| \frac{\Omega_y}{w_y} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{w^2}{2} \right) &= f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.2)$$

sau

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_x}{\partial t} + \underbrace{\left( \frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x} \right)}_{\Omega_y} w_z - \underbrace{\left( \frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} \right)}_{\Omega_z} w_y + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{w^2}{2} \right) &= f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial w_y}{\partial t} + \underbrace{\left( \frac{\partial w_z}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial z} \right)}_{\Omega_z} w_x - \underbrace{\left( \frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z} \right)}_{\Omega_x} w_z + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{w^2}{2} \right) &= f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w_z}{\partial t} + \underbrace{\left( \frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z} \right)}_{\Omega_x} w_y - \underbrace{\left( \frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x} \right)}_{\Omega_y} w_x + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{w^2}{2} \right) &= f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.3)$$

sub formă scalară, în coordonate carteziene, sau

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + (\nabla \times \vec{w}) \times \vec{w} + \nabla \left( \frac{w^2}{2} \right) = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (1.4)$$

în exprimare vectorială.

Pentru mișcarea permanentă:  $\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} = 0$

Pentru mișcare irotațională:  $\vec{\Omega} = 0$  și deci  $rot \vec{w} = \nabla \times \vec{w} = 0$

Astfel, rezultă ecuația pentru un fluid nevâscos aflat în mișcare permanentă și irotațională:

$$\frac{1}{2} \nabla w^2 = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (1.5)$$

Pentru fluidele compresibile studiate, adică pentru gaze, forțele masice unitare (raportate la unitatea de masă) sunt egale cu zero (gazele pot fi considerate ca fluide fără greutate) adică:

$$\vec{f} \cong 0 \quad (f_x = 0, f_y = 0, f_z = 0)$$

iar ecuația (1.5) devine:

$$\frac{1}{2} \nabla w^2 + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \quad (1.6)$$

Înmulțind scalar membrii ecuației (1.6) cu  $d\vec{s}$  (elementul de deplasare al particulei de fluid pe traiectorie – deplasarea elementară) se obține ecuația:

$$\frac{1}{2} \nabla w^2 \cdot d\vec{s} + \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\vec{s} = 0 \quad (1.7)$$

adică rezultă ecuația:

$$d\left(\frac{w^2}{2}\right) + \frac{dp}{\rho} = 0 \quad (1.8)$$

Integrând în lungul unui fir de curent, se obține:

$$\frac{w^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = \text{const.} \quad (1.9)$$

## 1.2. INTERPRETAREA ENERGETICĂ A ECUAȚIEI CURGERII PERMANENTE IROTAȚIONALE A FLUIDELOR COMPRESIBILE NEVÂSCOASE

Dacă se integrează ecuația diferențială (1.8) între două puncte, 1 și 2 situate pe un fir de curent ale curgerii rezultă:

$$\frac{w_2^2}{2} - \frac{w_1^2}{2} + \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} = 0 \quad (1.10)$$

Dar,  $\frac{1}{\rho} = v$  este volumul specific și se obține ecuația:

$$\frac{w_1^2 - w_2^2}{2} = \int_{p_1}^{p_2} v \, dp \quad (1.11)$$

sau

$$\frac{w_1^2 - w_2^2}{2} = (l_T)^{1-2} \quad (1.12)$$

unde:

$\frac{w_1^2 - w_2^2}{2}$  - este diminuarea de energie cinetică a unității de masă de fluid între punctele 1 și 2;

$(\int_T)^{1-2} = \int_{p_1}^{p_2} v dp$  - lucrul mecanic de transvazare a unității de masă de fluid între secțiunile 1 și 2.

Dacă ecuația curgerii permanente, irotaționale a fluidelor compresibile nevâscoase (1.11) sau (1.12) exprimă conservarea energiei mecanice: diminuarea energiei cinetice între două puncte ale curgerii este egală cu lucrul mecanic de transvazare primit de fluid.

### 1.3. INTEGRAREA PENTRU CAZUL CURGERII IZENTROPICE A GAZULUI PERFECT

Pentru a integra ecuația dinamicii fluidelor compresibile în mișcare permanentă și irotațională, se vor utiliza următoarele relații:

- ecuația de stare a gazelor perfecte:

$$pv = RT \text{ sau } \frac{p}{\rho} = RT \quad (1.13)$$

unde  $R$  este constanta gazului iar  $T$  temperatura în scară absolută.

- relația lui Mayer:

$$c_p - c_v = R \quad (1.14)$$

unde  $c_p$  și  $c_v$  sunt căldurile specifice masice, la presiune constantă și respectiv la volum constant.

- relația care exprimă exponentul adiabatic:

$$k = \frac{c_p}{c_v} \quad (1.15)$$

- relațiile care rezultă din expresiile (1.14) și (1.15):

$$c_p = \frac{k}{k-1} R \quad c_v = \frac{1}{k-1} R \quad (1.16)$$

- relațiile specifice unei curgeri izentropice:

$$\frac{T^{k/(k-1)}}{p} = \text{const.}, \quad T \cdot v^{k-1} = \text{const.}, \quad p \cdot v^k = \text{const.} \quad (1.17)$$



Relațiile (1.17) se mai pot scrie și sub forma:

$$\frac{p^{(k-1)/k}}{T} = \text{const.}, \quad \frac{T}{\rho^{k-1}} = \text{const.}, \quad \frac{p}{\rho^k} = \text{const.} \quad (1.18)$$

Din relația  $\frac{p}{\rho^k} = \text{const.}$ , se poate scrie succesiv:

$$p = C \cdot \rho^k, \quad dp = C \cdot k \cdot \rho^{k-1} d\rho, \quad dp = C \cdot k \cdot \rho \cdot \rho^{k-2} d\rho$$

de unde rezultă:

$$\frac{dp}{\rho} = C \cdot k \cdot \rho^{k-2} \cdot d\rho \quad (1.19)$$

Se poate scrie:

$$\int \frac{dp}{\rho} = \int C \cdot k \cdot \rho^{k-1} d\rho = C \cdot \frac{k}{k-1} \cdot \rho^{k-1} = C \cdot \rho^k \cdot \rho^{-1} \cdot \frac{k}{k-1} \quad (1.20)$$

de unde rezultă expresia (deoarece  $C \cdot \rho^k = p$ ):

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} \quad (1.21)$$

Substituind expresia (1.21) în relația (1.9) rezultă:

$$\frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} = \text{const.} \quad (1.22)$$

sau, pentru că  $\frac{p}{\rho} = RT$  rezultă o altă formă a relației (1.22):

$$\frac{k}{k-1} RT + \frac{w^2}{2} = \text{const.} \quad (1.23)$$

Relația (1.22) scrisă și sub forma (1.23) poartă numele de relația lui Barré de Saint-Venant.

Având în vedere faptul că  $c_p = \frac{k}{k-1} R$  rezultă că relația (1.23) se poate scrie și sub forma:

$$c_p T + \frac{w^2}{2} = \text{const.} \quad (1.24)$$

Integrând relația lui Barré de Saint-Venant sub forma (1.22) și (1.24) între punctele 1 și 2 din curgere, se obțin relațiile:

$$\frac{w_1^2 - w_2^2}{2} = \frac{k}{k-1} \left( \frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) \quad (1.25)$$

și

$$\frac{w_1^2 - w_2^2}{2} = c_p (T_2 - T_1) \quad (1.26)$$

Pornind de la expresia  $p v^k = \text{const.}$ , se poate scrie succesiv:

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{const.}, \quad \frac{p_1}{\rho_1^k} = \frac{p_2}{\rho_2^k} \quad (1.27)$$

de unde rezultă expresiile:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^k \quad (1.28)$$

sau

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{k}} \quad (1.29)$$

Relația (1.25) se mai poate scrie și sub forma:

$$\frac{w_1^2 - w_2^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left( \frac{p_2 \rho_1}{p_1 \rho_2} - 1 \right) \quad (1.30)$$

Înlocuind expresia (1.28) în relația (1.30) rezultă:

$$\frac{w_1^2 - w_2^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[ \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^k \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 \right]$$

sau

$$\frac{w_1^2 - w_2^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[ \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{k-1} - 1 \right] \quad (1.31)$$

Înlocuind expresia (1.29) în relația (1.31) se obține relația de mai jos:

$$\frac{w_1^2 - w_2^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] \quad (1.32)$$

Termenul din membrul din dreapta al relației (1.32) reprezintă *lucrul mecanic de transvazare izentropică*.