

ETUDE DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE DANS LA LIGNE MICRO-RUBAN BLINDÉE EN UTILISANT LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES

Ștefan CANTARAGIU¹

Abstract. *Le présent article est le deuxième d'une série de trois articles publiés dans cette revue et qui fournit une brève présentation du livre « Micro-ondes - solution numérique », écrit par le même auteur. La Méthode des Différences Finies (MDF), utilisée avec succès pour résoudre les problèmes scalaires et vectoriels les plus difficiles de l'électrodynamique, facilite l'approximation des équations de Helmholtz dans un nombre fini du domaine analysé. Les avantages de la méthode résident dans la possibilité de réunir les deux domaines en un seul problème et dans sa mise en œuvre plus rapide, ce qui permet de définir facilement les conditions aux frontières. Dans la dernière section de l'article, les résultats et les graphiques des composantes du champ électromagnétique sont présentés. Les inférences de simulation à la frontière des domaines air et diélectrique sont également mises en évidence. Les modes de propagation hybrides d'ordre supérieur sont déterminés en sélectionnant les valeurs propres une à une par ordre croissant de fréquence.*

Keywords: Méthode des Différences Finies (MDF), Méthode des éléments finis (MEF), équations de Helmholtz, valeurs propres et vecteurs propres, conditions aux frontières, points de fictions.

DOI [10.56082/annalsarsciinfo.2024.1.15](https://doi.org/10.56082/annalsarsciinfo.2024.1.15)

I. Introduction

L'article vise l'étude du champ électromagnétique dans la ligne micro-ruban blindée en utilisant MDF, qui est l'une des méthodes numériques les plus performantes, qui a été utilisée avec succès pour résoudre les problèmes les plus complexes de l'électrodynamique, et qui reflète le comportement du champ électromagnétique dans la structure analysée.

Compte tenu des techniques d'approximation numérique, utilisées pour résoudre des équations aux dérivées partielles, les travaux publiés dans la littérature spécialisée [1]÷[10], qui traitent de l'analyse des modes de propagation hybrides et des propriétés de dispersion des lignes micro-ruban, peuvent être divisés en deux groupes. Le premier groupe concerne des méthodes numériques précédées d'un traitement analytique important, tandis que le deuxième groupe se caractérise plutôt par un traitement analytique extrêmement rudimentaire, toute la difficulté étant transférée aux procédures de calcul disponibles sur le marché.

¹ Chercheur principal, membre correspondant de l'Académie des Scientifiques Roumains.

Les méthodes numériques font principalement référence à la FDM et à la méthode des éléments finis (MEF) pour résoudre les problèmes électrodynamiques les plus complexes, tels que le comportement du champ électromagnétique dans la ligne micro-ruban blindée et mettent en évidence les frontières des formules utilisées par la méthode quasi-statique aux fréquences micro-ondes plus élevées.

MDF offre des avantages significatifs en cas d'analyse de structures électrodynamiques; ces avantages seront mis en évidence dans le contenu de l'article.

II. Formulation

MDF est appliqué pour approximer les solutions des doubles équations de Helmholtz:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 H_z(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z(x,y)}{\partial y^2} + k_\delta^2 H_z(x,y) &= 0, \\ \frac{\partial^2 E_z(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z(x,y)}{\partial y^2} + k_\delta^2 E_z(x,y) &= 0,\end{aligned}$$

dans le cas des problèmes de Neuman et Dirichlet (k représente le nombre d'onde longitudinal, et l'indice δ , avec $\delta=1\div 2$, met en évidence les domaines air et diélectrique).

Les solutions des équations de Helmholtz sont déterminées, continues sur le domaine compact $D \cup \Gamma$ (Γ est la frontière du domaine D), délimité par la section transversale par la ligne micro-ruban blindée (figure 1) et qui satisfont aux conditions aux frontières:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_z}{\partial \vec{n}} \Big|_\Gamma &= 0, \vec{n} \text{ est le verseur normal à } \Gamma. \\ E_z \Big|_\Gamma &= 0.\end{aligned}$$

Pour réduire le problème à un problème numérique, le maillage de la figure 1 est considéré:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + j\Delta x, \\ y &= y_0 + i\Delta y, \quad i, j \in \mathbf{Z},\end{aligned}$$

qui couvre le domaine $D \left(\frac{1}{2}\right) \cup \Gamma \left(\frac{1}{2}\right)$ (pour des raisons de symétrie, seule la moitié de la section de la ligne micro-ruban est utilisée).

Les points de $D^{(\frac{1}{2})} \cup \Gamma^{(\frac{1}{2})}$, qui appartiennent au réseau et qui ont au moins un point voisin extérieur au domaine forment la frontière du réseau, $\Gamma_1^{(\frac{1}{2})}$.

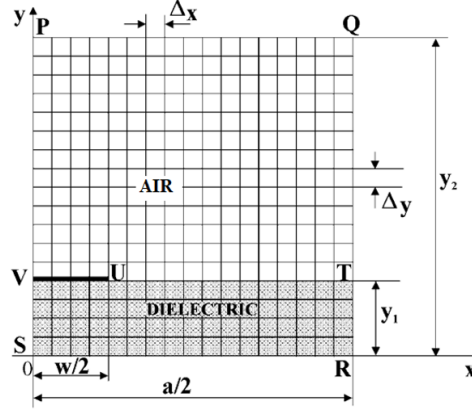


Figure 1. Le réseau des cellules rectangulaires des cellules associées à la cellule élémentaire

Dans chaque nœud (j,i) (qui correspond au point de coordonnées $(x_0 + j\Delta x, y_0 + i\Delta y) \equiv (x_j, y_i)$) dans le domaine $D_1^{(\frac{1}{2})}$, la première équation de Helmholtz est approximée par une équation aux différences finies qui utilisera les approximations des dérivées de la composante longitudinale du champ magnétique (la notation $\phi = H_z$ est utilisée):

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{j,i} \approx \frac{\phi_{j+1,i} - \phi_{j-1,i}}{2\Delta x}, \quad (1a)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_{j,i} \approx \frac{\phi_{j+1,i} - 2\phi_{j,i} + \phi_{j-1,i}}{\Delta x^2}, \quad (1b)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_{j,i} \approx \frac{\phi_{j,i+1} - \phi_{j,i-1}}{2\Delta y}, \quad (1c)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right)_{j,i} \approx \frac{\phi_{j,i+1} - 2\phi_{j,i} + \phi_{j,i-1}}{\Delta y^2}. \quad (1d)$$

Les dérivées de première ordre (1a) et (1c) sont utilisées afin d'établir les relations entre les composantes longitudinales du champ magnétique, à la proximité de l'écran électrique. La notation $\eta = \frac{\omega \epsilon_0}{\beta} E_z$, est utilisée afin de simplifier les relations entre les composantes tangentielles à la surface de séparation des deux

milieux. Les approximations par différences finies des dérivées de la composante longitudinale du champ électrique sont déterminées de la manière suivante:

$$L(\phi) \equiv \Delta^2 \phi + k_\delta^2 \phi = 0, \quad (2a)$$

$$L(\eta) \equiv \Delta^2 \eta + k_\delta^2 \eta = 0. \quad (2b)$$

Utilisant les notations:

$$\lambda = k_1^2 \Delta x^2, R = \frac{\Delta x}{\Delta y} \text{ et } \tau = \frac{k_1^2}{k_2^2} \quad (3)$$

les équations différentielles deviennent:

$$\lambda \phi_{j,i} = 2(1 + R^2) \phi_{j,i} - \phi_{j+1,i} - \phi_{j-1,i} - R^2 \phi_{j,i+1} - R^2 \phi_{j,i-1}, \quad (4)$$

$$\lambda \eta_{j,i} = 2(1 + R^2) \eta_{j,i} - \eta_{j+1,i} - \eta_{j-1,i} - R^2 \eta_{j,i+1} - R^2 \eta_{j,i-1}, \quad (5)$$

pour l'air et:

$$\lambda \phi_{j,i} = 2\tau(1 + R^2) \phi_{j,i} - \tau \phi_{j+1,i} - \tau \phi_{j-1,i} - \tau R^2 \phi_{j,i+1} - \tau R^2 \phi_{j,i-1}, \quad (6)$$

$$\lambda \eta_{j,i} = 2\tau(1 + R^2) \eta_{j,i} - \tau \eta_{j+1,i} - \tau \eta_{j-1,i} - \tau R^2 \eta_{j,i+1} - \tau R^2 \eta_{j,i-1}, \quad (7)$$

pour le milieu diélectrique.

L'introduction du paramètre τ est très importante, car elle nous permet de déterminer la constante de temps du champ électromagnétique dans la ligne micro-ruban (les deux domaines sont réunis dans un seul problème).

Pour chaque point de l'ensemble $D_1^{(\frac{1}{2})}$ une équation aux différences finies est écrite, similaire aux (2.7) et (2.9), pour la composante ϕ et aux (2.8) et (2.10) pour la composante η . Parce que les fonctions inconnues ϕ et η sont données sur la courbe Γ , les procédures de transfert des conditions à la frontière sur $\Gamma_1^{(\frac{1}{2})}$ (qui n'est plus une courbe mais un ensemble de points) sont utilisées afin d'obtenir les conditions sur l'ensemble $\Gamma_1^{(\frac{1}{2})}$. La valeur attribuée aux fonctions ϕ et η dans un point $N \in \Gamma_1^{(\frac{1}{2})}$ dépend des valeurs des points voisins de N dans domaine $D_1^{(\frac{1}{2})}$ et sur Γ .

III. Équations aux différences finies sur les frontières

A la proximité d'écran électrique, où les conditions à la frontière imposent [8]:

$$\eta_{j,i}=0 \text{ et } \left(\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} \right)_{j,i} = 0$$

et, à la proximité d'écran magnétique (situé dans le plan $x = 0$ sur la figure 1), où les conditions à la frontière sont [8]:

$$\phi_{ji} = 0 \text{ et } \left(\frac{\partial \eta}{\partial \vec{n}} \right)_{j,i} = 0,$$

les équations (4)-(7) se modifient. Sur la frontière PQ (voir la figure 1), où:

$$\frac{\partial \phi_{j,i}}{\partial y} = 0 \text{ et } \eta_{j,i} = 0,$$

les équations (1c) et (2d), au-dessus de la frontière PQ, permettent écrire pour le nœud fictif $(j, i - 1)$, placé à l'extérieur du domaine $D_1^{(\frac{1}{2})}$:

$$\phi_{j,i+1} = \phi_{j,i-1}^{fictif}$$

$$\eta_{j,i+1} = -\eta_{j,i-1}^{fictif}$$

La dernière équation concernant l'asymétrie relative à l'écran électrique de la composante longitudinale du champ électrique ($\eta = \frac{\omega \varepsilon_0}{\beta} E_z$) sera utilisée afin de déterminer les composantes transversales du champ électrique. Compte tenant de la première équation ci-dessus, l'équation (4) devient:

$$\lambda \phi_{j,i} = 2(1 + R^2) \phi_{j,i} - \phi_{j+1,i} - \phi_{j-1,i} - 2R^2 \phi_{j,i+1} \quad (8)$$

De manière similaire, sur la frontière SR, le nœud fictif $(j, i + 1)$, placé à l'extérieur du domaine $D_1^{(\frac{1}{2})}$, sous la frontière SR, est utilisé et on trouve:

$$\phi_{j,i+1}^{fictif} = \phi_{j,i-1},$$

$$\eta_{j,i+1}^{fictif} = -\eta_{j,i-1}$$

Dans ces conditions, l'équation (6) devient:

$$\lambda\phi_{j,i} = 2\tau(1 + R^2)\phi_{j,i} - \tau\phi_{j+1,i} - \tau\phi_{j-1,i} - 2\tau R^2\phi_{j,i-1} \quad (9)$$

Sur la frontière QR (figure 1), où $\frac{\partial\phi_{j,i}}{\partial x} = 0$ et $\eta_{j,i} = 0$, compte tenant des équations (1a) et (2b), il résulte:

$$\phi_{j+1,i}^{fictif} = \phi_{j-1,i}$$

$$\eta_{j+1,i}^{fictif} = -\eta_{j-1,i}.$$

Dans ce cas, le nœud fictif est placé à l'extérieur du domaine $D_1^{(\frac{1}{2})}$, dans la partie droite de la frontière. Par conséquence, l'équation (4) devient:

$$\lambda\phi_{j,i} = 2(1 + R^2)\phi_{j,i} - 2\phi_{j-1,i} - R^2\phi_{j,i+1} - R^2\phi_{j,i-1}, \quad (10)$$

et l'équation (6) devient:

$$\lambda\phi_{j,i} = 2\tau(1 + R^2)\phi_{j,i} - 2\tau\phi_{j-1,i} - \tau R^2\phi_{j,i+1} - \tau R^2\phi_{j,i-1} \quad (11)$$

Sur la frontière PS (figure 1), où $\frac{\partial\eta_{j,i}}{\partial x} = 0$ et $\phi_{j,i} = 0$, il résulte:

$$\eta_{j+1,i} = \eta_{j-1,i}^{fictif}$$

$$\phi_{j+1,i} = -\phi_{j-1,i}^{fictif}$$

Le nœud $(j-1,i)$ est lui aussi un nœud fictif placé en dehors de la cellule élémentaire, à gauche de la frontière PS. Dans ce cas, l'équation (5) devient:

$$\lambda\eta_{j,i} = 2(1 + R^2)\eta_{j,i} - 2\eta_{j+1,i} - R^2\eta_{j,i+1} - R^2\eta_{j,i-1}, \quad (12)$$

et l'équation (7) devient:

$$\lambda\eta_{j,i} = 2\tau(1 + R^2)\eta_{j,i} - 2\tau\eta_{j+1,i} - \tau R^2\eta_{j,i+1} - \tau R^2\eta_{j,i-1}. \quad (13)$$

L'antisymétrie de la composante longitudinale du champ magnétique ($\phi = H_z$) relative à l'écran électrique est utilisée afin de déterminer les composantes transversales du champ magnétique. A la frontière de séparation des domaines,

définies par le produit cartésien $\{y = y_1\} \times \left[\frac{w}{2}, \frac{a}{2}\right]$, compte tenant de la loi de Gauss pour le champ magnétique (1d), la condition suivante est accomplie:

$$\vec{n}\vec{B}_A - \vec{n}\vec{B}_D = 0 \quad (14)$$

Les indices utilisés dans l'équation (14) mettent en évidence la densité du flux magnétique dans l'air (le premier) et respectivement la densité du flux magnétique dans le milieu diélectrique de la sous-couche (le deuxième). Parce que $\mu_{r1} = \mu_{r2} = 1$, on peut écrire:

$$H_{y,A} = H_{y,D} \Big|_{y=y_1}, \quad x \in \left(\frac{w}{2}, \frac{a}{2}\right) \quad (15)$$

De plus, selon la relation entre les composantes tangentielles des champs électrique et magnétique à la frontière de séparation entre les domaines air et diélectrique, respectivement H_{x0} , exprimé sous forme de séries rapidement convergentes utilisant des systèmes orthogonaux de polynômes et des fonctions de Chebyshev, il en résulte:

$$H_{x,A} = H_{x,D} \Big|_{y=y_1}, \quad x \in \left(\frac{w}{2}, \frac{a}{2}\right) \quad (16)$$

Considérant les relations entre les composantes tangentielles du champ électromagnétique à la surface de séparation entre les domaines air et diélectrique, les relations (15) et (16) deviennent:

$$-\frac{\partial \phi_A}{\partial y} + \frac{\partial \eta_A}{\partial x} = \tau \left(-\frac{\partial \phi_A}{\partial y} + \varepsilon_{r2} \frac{\partial \eta_D}{\partial x} \right) \quad (17)$$

$$-\frac{\partial \phi_A}{\partial x} + \frac{\partial \eta_A}{\partial y} = \tau \left(-\frac{\partial \phi_D}{\partial x} + \varepsilon_{r2} \frac{\partial \eta_D}{\partial y} \right) \quad (18)$$

Afin d'établir la liaison entre les composantes des champs électrique et magnétique, tangentielles à la surface de séparation des milieux, la notation $\phi_{j,i-1}^A$ est introduite; elle met en valeur les valeurs des composantes longitudinales du champ magnétique, correspondantes aux points $(j,i-1)$, placés dans l'air; aussi, la notation $\phi_{j,i+1}^D$ représente les valeurs correspondantes aux points $(j,i+1)$, placé dans le milieu diélectrique. Les équations aux différences finies correspondantes aux points situés sur la surface de séparation des milieux peuvent être écrites une fois utilisant la relation (4), quand l'interface est abordée du côté air:

$$\lambda \phi_{j,i} = 2(1 + R^2) \phi_{j,i} - \phi_{j+1,i} - \phi_{j-1,i} - R^2 \phi_{j,i+1} - R^2 \phi_{j,i-1}^A, \quad (19)$$

et la deuxième fois en utilisant la relation (6), quand l'interface est abordée du côté diélectrique:

$$\lambda\phi_{j,i} = 2\tau(1 + R^2)\phi_{j,i} - \tau\phi_{j+1,i} - \tau\phi_{j-1,i} - \tau R^2\phi_{j,i+1}^D - \tau R^2\phi_{j,i-1} \quad (20)$$

Afin d'éliminer les valeurs inconnues $\phi_{j,i-1}^A$ et $\phi_{j,i+1}^D$ dans les équations (19) et (20), les conditions (17) et (18) sont écrites sous une forme utilisant les différences finies:

$$(\tau - 1) \frac{\phi_{j+1,i} - \phi_{j-1,i}}{2\Delta x} = \varepsilon_{r2}\tau \frac{\eta_{j,i+1}^D - \eta_{j,i-1}}{2\Delta y} - \frac{\eta_{j,i+1} - \eta_{j,i-1}^A}{2\Delta y} \quad (21)$$

$$(\varepsilon_{r2}\tau - 1) \frac{\eta_{j+1,i} - \eta_{j-1,i}}{2\Delta x} = \varepsilon_{r2}\tau \frac{\phi_{j,i+1} - \phi_{j,i-1}^A}{2\Delta y} - \frac{\phi_{j,i+1}^D - \phi_{j,i-1}}{2\Delta y}. \quad (22)$$

Suivant l'élimination de $\phi_{j,i-1}^A$ et de $\phi_{j,i+1}^D$ dans l'équation (22), et utilisant les relations (19)÷(20), il résulte:

$$\lambda\phi_{j,i} = (1 + \tau)(1 + R^2)\phi_{j,i} - \frac{1}{2}(1 + \tau)\phi_{j+1,i} - R^2\phi_{j,i+1} - \frac{1}{2}(1 + \tau)\phi_{j-1,i} - \tau R^2\phi_{j,i-1} - \frac{1}{2}R(1 - \varepsilon_{r2}\tau)\eta_{j+1,i} + \frac{1}{2}R(1 - \varepsilon_{r2}\tau)\eta_{j-1,i}. \quad (23)$$

Les valeurs des composantes longitudinales du champ magnétique sur la ligne métallique (notée par VU sur la figure 1) sont déterminées en utilisant la relation (8) pour le cas où le réseau de droites aborde la ligne du côté air et en utilisant l'équation (9), quand celle-ci est abordée du côté diélectrique.

L'équation correspondante aux composantes longitudinales du champ électrique est obtenue de manière similaire en utilisant la relation (21), partant des équations aux différences finies correspondantes aux points situés sur la surface de séparation des milieux, écrites par l'intermédiaire de l'équation (5) (quand l'interface est abordée du côté air) et par l'intermédiaire de l'équation (7) (quand l'interface est abordée du côté diélectrique):

$$\lambda\eta_{j,i} = 2 \left(\frac{1 + \varepsilon_{r2}\tau}{1 + \varepsilon_{r2}} \right) (1 + R^2)\eta_{j,i} - \left(\frac{1 + \varepsilon_{r2}\tau}{1 + \varepsilon_{r2}} \right) \eta_{j+1,i} - \frac{2R^2}{\varepsilon_{r2} + 1} \eta_{j,i+1} - \left(\frac{1 + \varepsilon_{r2}\tau}{1 + \varepsilon_{r2}} \right) \eta_{j-1,i} - \frac{2\varepsilon_{r2}\tau R^2}{\varepsilon_{r2} + 1} \eta_{j,i-1} - \left(\frac{\tau - 1}{1 + \varepsilon_{r2}} R \right) \phi_{j+1,i} - \left(\frac{\tau - 1}{1 + \varepsilon_{r2}} R \right) \phi_{j-1,i} \quad (24)$$

Les équations (23) et (24) sont valables au plus grand nombre de points sur la surface de séparation entre les domaines air et diélectrique.

Il existe deux points sur la surface de séparation entre les deux environnements présentant des particularités, qui seront analysés plus en détail.

L'un d'eux est le point T de la figure 1, où l'interface rencontre la frontière QR, et la relation (24) ne peut pas être utilisée, car ici, $\eta_{j,i} = 0$, respectivement:

$$\eta_{j,i} = \frac{\partial^2 \eta_{j,i}}{\partial y^2} \equiv 0,$$

et en substituant l'identité ci-dessus dans l'équation de Helmholtz (2b), il en résulte:

$$\frac{\partial^2 \eta_{j,i}}{\partial x^2} = 0 \quad (25)$$

La deuxième condition au voisinage du mur électrique impose que:

$$\frac{\partial \phi_{j,i}}{\partial x} = 0.$$

Par conséquent, on obtient, conformément aux relations (1a), (2d) et (2b):

$$\begin{aligned} \phi_{j+1,i} &= \phi_{j-1,i}, \\ \eta_{j,i+1} &= -\eta_{j,i-1}, \\ \eta_{j+1,i} &= -\eta_{j-1,j} \end{aligned}$$

Ces conditions déterminent le changement de la relation (23), comme suit:

$$\begin{aligned} \lambda \phi_{j,i} &= (1 + \tau)(1 + R^2)\phi_{j,i} - (1 + \tau)\phi_{j+1,i} - R^2\phi_{j,i+1} - \\ &\quad - \tau R^2\phi_{j,i-1} - R(1 - \varepsilon_{r2}\tau)\eta_{j+1,i} \end{aligned} \quad (26)$$

L'analyse du comportement des composantes longitudinales des champs électrique et magnétique au voisinage de l'autre point de la surface séparant les domaines, noté U sur la figure 1, se fait de manière analogue.

IV. Problème de valeurs propres

Si les équations $\phi_{j,i}$ et $\eta_{j,i}$ sont sélectionnées à chaque fois parmi les relations (4)-(26), qui particularisent chaque nœud séparément du maillage représenté à la figure 1, on obtient un problème de valeurs propres et de vecteurs propres:

$$\mathbf{AX} = \lambda_k \mathbf{X}, \quad (27)$$

où

X est un vecteur propre;

λ_k (k représente le nombre d'équations aux différences finies dans le système) sont les valeurs propres;

A est une matrice carrée, dont l'étude sera reprise quand les logiciels de calcul seront détaillés.

Le vecteur X est formé par la réunion des fonctions $\phi_{j,i}$ et $\eta_{j,i}$, c'est-à-dire:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{12} \\ \vdots \\ \phi_{1m} \\ \phi_{21} \\ \vdots \\ \phi_{nm} \\ \eta_{11} \\ \eta_{12} \\ \vdots \\ \eta_{1p} \\ \eta_{21} \\ \vdots \\ \eta_{sp} \end{bmatrix}, k=n \times m + s \times p$$

La réunion des composantes longitudinales des champs magnétique et électrique dans un seul vecteur est imposée par le fait que les équations de continuité à la surface de séparation des milieux, (23) et (24), utilisent les composantes longitudinales du champ électrique mais aussi celles du champ magnétique; cette réunion est possible grâce au paramètre τ .

La solution du problème matricielle (27) permet à déterminer les composantes longitudinales puis transversale des champs électrique et magnétique.

V. Simulation informatique

Il s'agit d'une véritable structure de ligne micro-ruban blindée, fréquemment utilisée dans le domaine des radars, travaillant dans la gamme des ondes centimétriques et millimétriques, pour laquelle $w = 1 \text{ mm}$, $a = 3,5 \text{ mm}$, $y_1 = 0,5 \text{ mm}$, $y_2 = 2 \text{ mm}$ et $\epsilon_{r2} = 9$.

L'analyse du comportement du champ électromagnétique au voisinage des parois électriques et magnétiques est plus facile, si les nœuds du maillage qui recouvre la cellule élémentaire sont numérotés ($i=1\div 10, j=1\div 8, \Delta x = \frac{a}{14}=0,25 \text{ mm}$, et $\Delta y = \frac{y_2}{8}=0,25 \text{ mm}$).

Le maillage se compose de huit colonnes et dix lignes. Lorsqu'un maillage plus fin est utilisé, les erreurs introduites par les approximations FDM sont plus petites.

Les nœuds situés à l'interface entre les deux milieux, où $x \in \left[0, \frac{a}{2}\right]$ (on note que la zone où se situe la bande est également analysée), sont numérotés deux fois, car ici deux lignes ($i=7$ et $i=8$) sont utilisées, se chevauchant pratiquement.

Méthodes de détermination des composantes longitudinales du champ électromagnétique et des paramètres de propagation

La détermination des composantes longitudinales du champ électromagnétique $E_z(\eta)$ et $H_z(\phi)$ est réalisé à l'aide de l'environnement de développement intégré Matlab.

Le tableau 1 ci-dessous résume les conditions aux frontières auxquelles sont soumises les composantes longitudinales des champs électriques et magnétiques, conformément aux nœuds de la figure 1. Ces conditions sont prises en compte lors de l'élaboration du programme de calcul.

Le problème aux valeurs propres, généré après écriture des équations aux différences finies, correspondant aux composantes longitudinales du champ électrique et magnétique, calculées pour chaque nœud du maillage, s'écrit sous la forme:

$$(\lambda_k \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = 0,$$

où \mathbf{I} est la matrice unitaire, \mathbf{A} est la matrice carrée définie par (27) ; dans le cas de l'exemple du chapitre, la taille de la matrice comporte 12.100 éléments – 110 x 110; k représente le nombre d'équations aux différences finies ($k=1\div 110$). Pour réduire l'ordre de grandeur des erreurs qui apparaissent en remplaçant les équations de Helmholtz par des équations aux différences finies, le nombre d'éléments pourrait être augmenté en conséquence.

La numérotation des nœuds du maillage, qui correspondent aux valeurs des composantes longitudinales du champ, peut être choisie, en principe, par choix - dans le cas présent avec les nœuds qui correspondent aux valeurs des composantes

longitudinales du champ, champ électrique, situé dans la partie supérieure gauche de la cellule élémentaire. Le numéro de séquence du nœud est placé dans la partie inférieure droite de celui-ci.

Tableau 1

Nœuds frontières	Conditions aux frontière	
les nœuds sur les frontières PQ et SR	murs électriques horizontaux	$\eta_{j,i} = 0; \frac{\partial \phi_{j,i}}{\partial y} = 0$
les nœuds sur le QR frontière	mur électrique vertical	$\eta_{j,i} = 0; \frac{\partial \phi_{j,i}}{\partial x} = 0$
les nœuds sur le PS frontière	mur magnétique vertical	$\phi_{j,i} = 0; \frac{\partial \eta_{j,i}}{\partial x} = 0$
les nœuds placés au-dessus et en dessous de la bande VU	murs électriques horizontaux	$\eta_{j,i} = 0; \frac{\partial \phi_{j,i}}{\partial y} = 0$
les nœuds correspondant au point U	mur électrique vertical	$\eta_{j,i} = 0; \frac{\partial \phi_{j,i}}{\partial x} = 0$
les nœuds sur la surface de séparation entre les supports diélectriques	air - diélectrique	$\eta_{j,i}^A = \eta_{j,i}^D; \phi_{j,i}^A = \phi_{j,i}^D$ $H_{xA} = H_{xD}; H_{yA} = H_{yD}$

Après avoir épuisé les valeurs des composantes longitudinales, les nœuds sont renumérotés, cette fois pour mettre en évidence les valeurs des composantes longitudinales du champ magnétique aux points du maillage, en partant de la partie inférieure gauche de la cellule élémentaire. Le numéro de séquence du nœud est placé dans la partie supérieure droite de celui-ci.

Chaque nœud du maillage a été numéroté deux fois, la première fois pour mettre en évidence la valeur de la composante longitudinale du champ électrique, et la deuxième fois pour mettre en évidence la valeur de la composante longitudinale du champ magnétique. Les nœuds où les valeurs des composantes longitudinales des champs électriques et magnétiques sont nulles reçoivent le numéro 0.

Pour déterminer les valeurs des composantes longitudinales qui correspondent aux nœuds sur les frontières, selon les étapes présentées, des séries de nœuds factices sont utilisées. Ces derniers sont situés en dehors du domaine $D_1^{(\frac{1}{2})}$, et la saisie des valeurs qui leur correspondent dans la matrice A se fait en tenant compte des relations (8)-(13). L'antisymétrie des composantes longitudinales par rapport aux frontières est indiquée sur le dessin avec l'appui du signe négatif, et leur symétrie du signe positif.

A la surface de séparation entre les deux domaines, définie par la relation cartésienne $\{y=y_1\} \times \left[\frac{w}{2}, \frac{a}{2}\right]$, les relations (23)÷(26) sont utilisées. Le problème des valeurs propres et des vecteurs propres est généré en écrivant dans leur ordre naturel les 110 équations correspondant à chaque nœud du maillage ($i=1\div 10$, $j=1\div 8$), de 1 à 110, en sélectionnant chacune d'entre elles, parmi les relations (4)÷(26), l'équation qui singularise chaque nœud. L'introduction de la matrice A dans le programme de calcul devient plus facile par partitionnement. On considère l'observation que les éléments non nuls de la matrice sont regroupés dans sa zone diagonale (fait dû à l'utilisation de la procédure "d'approximation croisée" lors de l'application du MDF).

La procédure de calcul est la suivante : pour la valeur τ choisie par le programme parmi les 110 valeurs propres, on détermine la valeur propre correspondant à la fréquence de travail la plus basse de la gamme (pour $\tau = -5$ la valeur propre, qui désigne le mode hybride fondamental de propagation depuis la ligne, correspond à la constante de phase $\beta=1131,62 \text{ rad/m}$ et à la fréquence $f_1=19,509 \text{ GHz}$).

La valeur propre avec la plus petite valeur négative désigne le mode de propagation fondamental hybride dans la ligne de transmission micro-ruban blindée.

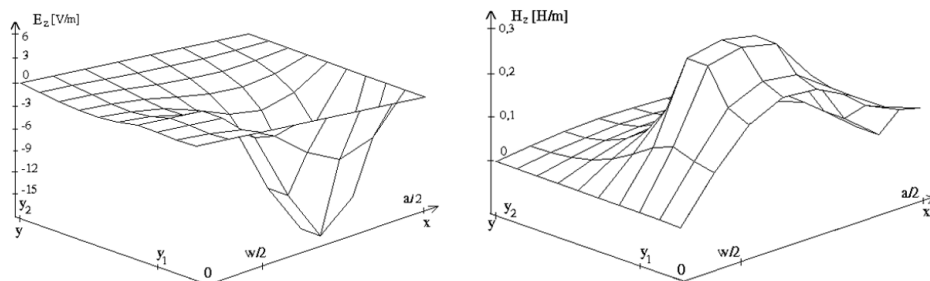


Figure 2. La variation des composantes et correspondant au mode hybride fondamental de propagation dans les nœuds du maillage $((x_j, y_i), j=1\div 8 \text{ et } i=1\div 10)$.

L'étape suivante est la détermination du vecteur propre à partir de la structure duquel les composantes longitudinales du champ électrique sont séparées de celles du champ magnétique.

La figure 2 montre les graphiques des composantes électriques et magnétiques longitudinales qui mettent en évidence le fait que les variations majeures se situent, comme prévu, dans la zone d'interface entre les deux domaines et dans la zone diélectrique du substrat. Les modes de propagation hybrides d'ordre

supérieur sont déterminés en sélectionnant les valeurs propres une par une par ordre croissant de fréquence.

Les figures 3 et 4 montrent les composantes longitudinales du champ électromagnétique, déterminées avec les deux valeurs suivantes des constantes de phase, choisies par ordre croissant de fréquence ($f_2=60,385$ GHz et $f_3=148,9807$ GHz)) et qui correspondent à la supérieures modes de propagation hybrides d'ordre 2 et 3.

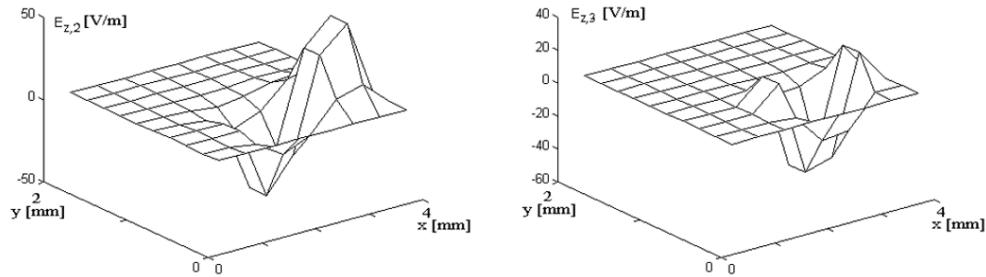


Figure 3. Variation des composantes longitudinales du champ électrique E_{z2} et E_{z3} et dans les nœuds du maillage $((x_j, y_i), j=1 \div 8, \text{ et } i=1 \div 10)$

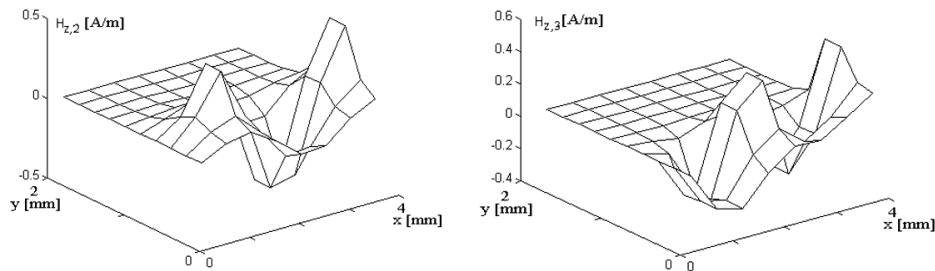


Figure 4. Variation des composantes longitudinales du champ magnétique H_{z2} et H_{z3} dans les nœuds du maillage $((x_j, y_i), j=1 \div 8, \text{ et } i=1 \div 10)$

Méthodes de détermination des composantes transversales du champ électromagnétique

Les composantes transversales des champs électrique et magnétique (E_x , E_y , H_x et H_y) sont calculées dans lequel interviennent les dérivées des composantes longitudinales. Pour un point du domaine $D^{(\frac{1}{2})} \cup \Gamma^{(\frac{1}{2})}$, le calcul des dérivées se fait à l'aide des relations (1a), (1c), (2a) et (2c). Les dérivées correspondant aux points sur les frontières (parois électriques et magnétiques) sont calculées en introduisant quelques points fictifs, placés en dehors du domaine $D^{(\frac{1}{2})}$.

Dans le cas du mur électrique vertical, délimité par la frontière QR, où $\frac{\partial \phi_{8,i}}{\partial x} = 0$ et $\eta_{8,i}=0$, en considérant les relations (1a) et (2b), il s'ensuit:

$$\phi_{9,i}^{fictif} = \phi_{7,i} \quad (28)$$

$$\eta_{9,i}^{fictif} = -\eta_{7,i}, i=1 \div 10 \quad (29)$$

Pour les murs électriques horizontaux, où $\frac{\partial \phi_{j,i}}{\partial y} = 0$ et $\eta_{j,i}=0$, en considérant les relations (1c) et (2d), il s'ensuit :

- correspondant à la frontière PQ

$$\phi_{j,2} = \phi_{j,0}^{fictif} \quad (30)$$

$$\eta_{j,2} = -\eta_{j,0}^{fictif}, j=1 \div 8; \quad (31)$$

- correspondant à la frontière SR

$$\phi_{j,11}^{fictif} = \phi_{j,9} \quad (32)$$

$$\eta_{j,11}^{fictif} = -\eta_{j,9}, j=1 \div 8 \quad (33)$$

Pour le mur magnétique, noté PS, où $\frac{\partial \eta_{j,i}}{\partial x} = 0$ et $\phi_{j,i}=0$, en considérant les relations (2a) et (1b), il en résulte:

$$\eta_{2,i} = \eta_{0,i}^{fictif} \quad (34)$$

$$\phi_{2,i} = -\phi_{0,i}^{fictif}, i=1 \div 10 \quad (35)$$

Pour le calcul des dérivées des composantes longitudinales à la surface de séparation entre les deux domaines, définie par la relation cartésienne $\{y=y_1\} \times \left[\frac{w}{2}, \frac{a}{2}\right]$ (frontière UT), les nœuds fictifs (j, 6) et (j, 9) sont introduits, que l'on retrouve dans les relations correspondant au champ magnétique:

$$i=7 \Rightarrow \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_{j,7}^A = \frac{\phi_{j,8} - \phi_{j,6}^A}{2\Delta y}, \quad (36)$$

$$i=8 \Rightarrow \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{j,8}^D = \frac{\phi_{j,9}^D - \phi_{j,7}}{2\Delta y}, \quad (37)$$

où $j=4 \div 8$.

L'élimination des valeurs correspondant aux nœuds fictifs se fait à l'aide de la relation (4), écrite pour $i=7$:

$$\lambda \phi_{j,7} = 2(1 + R^2)\phi_{j,7} - \phi_{j+1,7} - \phi_{j-1,7} - R^2\phi_{j,8} - R^2\phi_{j,6}^A \quad (38)$$

et de la relation (6), écrite pour $i=8$:

$$\lambda \phi_{j,8} = 2\tau(1 + R^2)\phi_{j,8} - \tau\phi_{j+1,8} - \tau\phi_{j-1,8} - \tau R^2\phi_{j,9}^D - \tau R^2\phi_{j,7} \quad (39)$$

De manière analogue, les dérivées des composantes longitudinales du champ électrique sont calculées, respectivement pour $i=7$ et pour $i=8$ pour $j=4 \div 8$.

L'élimination des valeurs correspondant aux nœuds fictifs se fait, cette fois à l'aide de la relation (5), écrite pour $i=7$:

$$\lambda \eta_{j,7} = 2(1 + R^2)\eta_{j,7} - \eta_{j+1,7} - \eta_{j-1,8} - R^2\eta_{j,8} - R^2\eta_{j,6}^A \quad (40)$$

et de la relation (7), écrite pour $i=8$:

$$\lambda \eta_{j,8} = 2\tau(1 + R^2)\eta_{j,8} - \tau\eta_{j+1,8} - \tau\eta_{j-1,8} - \tau R^2\eta_{j,9}^D - \tau R^2\eta_{j,7} \quad (41)$$

De manière analogue, on calcule les dérivées des composantes longitudinales des champs électriques et magnétiques, correspondant aux nœuds situés sur la bande VU, où:

$$i=7 \Rightarrow \begin{cases} \phi_{j,8}^{fictif} = \phi_{j,6} \\ \eta_{j,8}^{fictif} = -\eta_{j,6} \end{cases} \quad (42)$$

et

$$i=8 \Rightarrow \begin{cases} \phi_{j,7}^{fictif} = \phi_{j,9} \\ \eta_{j,7}^{fictif} = -\eta_{j,9} \end{cases} \quad (43)$$

pour $j=1 \div 3$.

L'élimination des valeurs des composantes du champ magnétique, correspondant aux nœuds fictifs, se fait à l'aide de la relation (4), écrite pour $i=7$ et de la relation (6), écrite pour $i=8$.

Les figures 5 et 6 montrent les graphiques des composantes transverses des champs électrique et magnétique, correspondant au mode hybride fondamental de propagation en chaque nœud du maillage.

Conformément à la méthode d'identification des modes de propagation d'ordre supérieur, décrite dans la section IV, les figures 7 et 8 montrent les composantes transversales du champ électromagnétique, déterminées avec les deux valeurs suivantes des constantes de phase, choisies par ordre croissant de fréquence et qui correspondent à des modes hybrides supérieurs d'ordre 2 et 3 pour $E_{x,2}$ et $E_{x,3}$, $E_{x,2}$ et $E_{x,3}$.

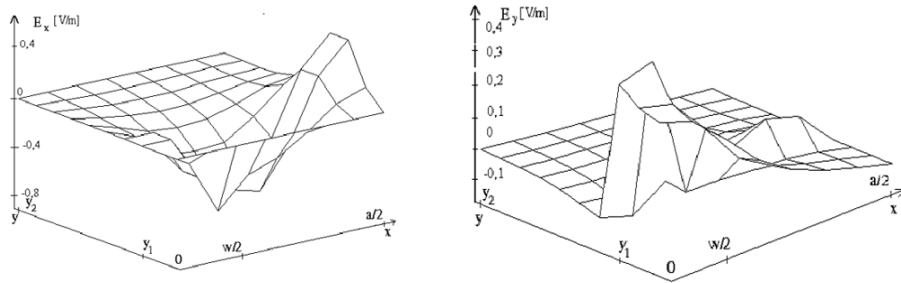


Figure 5. Variation des composantes E_x et E_y correspondant au mode de propagation hybride fondamental dans les nœuds du maillage (x_j, y_i) , $j=1 \div 8$ and $i=1 \div 10$

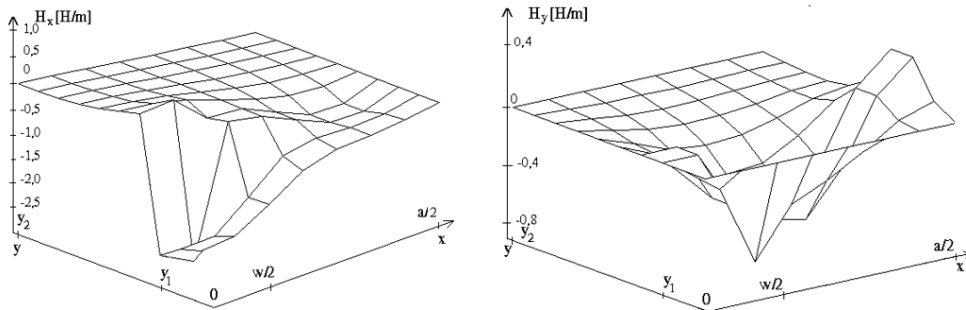


Figure 6. Variation des composantes H_x et H_y correspondant au mode de propagation hybride fondamental dans les nœuds du maillage (x_j, y_i) , $j=1 \div 8$ and $i=1 \div 10$

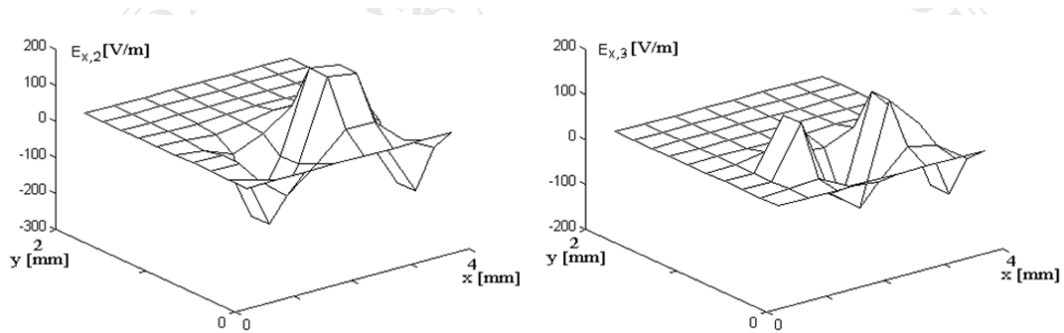


Figure 7. Variation des composantes transverses du champ électrique $E_{x,2}$ et $E_{x,3}$ dans les nœuds du maillage $((x_j, y_i), j=1 \div 8, \text{ et } i=1 \div 10)$

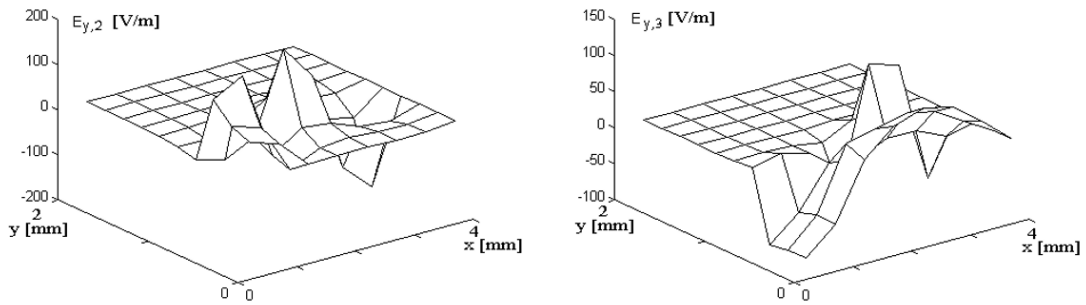


Figure 8. Variation des composantes transverses du champ électrique $E_{y,2}$ et $E_{y,3}$ dans les nœuds du maillage $((x_j, y_i), j=1 \div 8, \text{ et } i=1 \div 10)$

Variation des composantes transversales du champ électrique $H_{x,2}$, $H_{x,3}$, $H_{y,2}$ et $H_{y,3}$ sont calculées de la même manière.

VI. Remarques finales

MDF est une technique numérique particulièrement puissante, utilisée avec succès dans la résolution des problèmes scalaires et vectoriels les plus difficiles de l'électrodynamique [8]÷[10] et [14], qui permet l'approximation des équations de Helmholtz avec des différences finies en un nombre fini de points de le domaine analysé.

L'un des avantages du MDF réside dans la possibilité de réunir les deux domaines analysés dans un seul problème et, implicitement, dans la mise en œuvre et la résolution plus rapides du modèle mathématique. Dans le même temps, le MDF facilite facilement les problèmes de manipulation des frontières dans le but de

définir les conditions aux frontières, respectivement au voisinage de la bande ou à l'interférence entre les domaines air et diélectrique.

A cet égard, l'étude choisit de satisfaire les conditions imposées au champ électromagnétique à l'interférence entre les domaines air et diélectrique, et il est ainsi possible de rassembler les composantes longitudinales des champs électrique et magnétique au sein d'un même problème de valeurs propres et vecteurs. Suite à l'identification des vecteurs propres, les valeurs des composantes longitudinales puis transversales des champs électriques et magnétiques sont déterminées en tous points du maillage dans les domaines analysés.

L'ordre de grandeur des erreurs qui apparaissent en remplaçant les équations de Helmholtz par des équations aux différences finies est égal à l'ordre de grandeur du carré du pas de maillage sélectionné ($(\Delta x)^2$ et $(\Delta y)^2$), qui doit être le plus petit et le plus fin possible.

LES RÉFÉRENCES

- [1] Schneider M. V., Microstrip Lines for Integrated Circuits, Bell Syst. Tech. J., vol. 48, pages 1421÷1444, May÷June 1969
- [2] Yamashita E., Mitra R., Variational Method for the Analysis of Microstrip Lines, IEEE Trans. Microwave Theory, Tech., vol. MTT - 16, pages 251÷256, Apr. 1968
- [3] Judd S. V., Whiteley I., Clowes R. J., Rickard D. C., An Analytical Method for Calculating Microstrip Transmission Line Parameters, IEEE TMTT, vol. MTT-18, pages 78÷87, Feb. 1970
- [4] Stinehelfer H., An Accurate Calculation of Uniform Microstrip Transmission Lines, IEEE TMTT., vol. MTT-16, pages 439÷444, July 1968
- [5] Wheeler H. A., Transmission - Line Properties of Parallel Strips Separated by a Dielectric Sheet, IEEE TMTT, vol.MTT-13, pages172-185, March 1965
- [6] Sobol H., Applications of Integrated Circuits Technology to Microwave Frequencies, Proc. IEEE, vol. 59, pages 1200÷1211, Aug. 1971
- [7] Zysman G. I., Varon D., Wave Propagation in Microstrip Transmission Lines, 1969 G-MTT Symp. Dig., pp. 3÷9, May 1969
- [8] Hornsby J. S., Gopinath A., Numerical Analysis of a Dielectric Loaded Waveguide with a Microstrip Line Finite Difference Methods, IEEE TMTT, vol. 17, pp. 684÷691, Sept. 1969
- [9] Schulz N., Bierwirth K., Arndt F., Koster U., Finite-Difference Method without Spurious Solutions for the Hybrid-Mode Analysis of Diffused Channel Waveguide Structure, IEEE TMTT, vol. 38, pp.722÷729, June 1990

- [10] Patrick S., Webb K., A Variational Vector Finite Difference Analysis for Dielectric Waveguides, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. 40, pp. 692÷698, Apr. 1992
 - [11] Lojewski G., Microwave Devices and Circuits, Technical Publishing House, Bucharest, 2005, ISBN 973-31-2263-7
 - [12] Crisan N., Antennas and Circuits for Microwaves, Risoprint Publishing House, 2008, ISBN 978-973-751-867-5
 - [13] Iordăchescu G-A, Microwaves: Theory and Applications, Publishing House of the University of Pitesti, 2018, ISBN 978-606-560-595-4
 - [14] Cantaragiu S., Analysis of shielded microstrip lines by finite-difference method, ICECS'99. Proceedings of ICECS'99. 6th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems (Cat. No. 99EX357), pages 565-567, 1999/9/5
 - [15] Cantaragiu S., Microwaves Circuits, Publishing House All, Bucharest, 2000, pages 1-195, ISBN 973-684-165-0
 - [16] Coman C.I., Lager I.E., Ligthart L.P., Cantaragiu S. and Szilagyi A., The Effect of the Mutual Coupling in Smart Antenna for Electronic Warfare Applications, NATO IST/SET Symposium, Chester, UK, 7-8 April 2003.
-